Libros de Cátedra

Análisis Matemático para Ciencias Exactas y Naturales

Funciones de una variable real

Gerardo L. Rossini
Contribuciones de Ana E. Alonso

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

exactas

edulp Editorial de la Universidad de La Plata

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

ANÁLISIS MATEMÁTICO PARA CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

Gerardo L. Rossini

Contribuciones de Ana E. Alonso

Facultad de Ciencias Exactas

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

edulp

Editorial de la Universidad de La Plata

A los docentes del Departamento de Matemática
de la Facultad de Ciencias Exactas,
quienes con su trabajo diario logran
incorporar en los alumnos el lenguaje de la ciencia.

Agradecimientos

Este material fue desarrollado durante los cursos 2014 - 2016 de Análisis Matemático I dictados para el Ciclo Básico de la Facultad de Ciencias Exactas (CiBEx). En estos cursos participaron cerca de sesenta docentes, entre profesores, jefes de trabajos prácticos, ayudantes diplomados y ayudantes alumnos. Quiero expresar mi agrademiento hacia todos ellos porque con sus sugerencias, discusiones, interés, críticas, comentarios y correcciones dieron forma definitiva al texto de este libro.

En particular a Ana Alonso, junto a quien coordinamos este grupo docente, elaboramos las distintas versiones del material de estudio y actividades de la cátedra, y con razón opinó que el presente texto aún podría mejorarse. Aún a riesgo de omisiones, quisiera destacar las atentas contribuciones de Jorge Antezana, Francisco Martínez Pería, Mario Rocca, María Inés Otegui, Leandro Andrini, Mariano Ruiz, Andrés Kowalski, Ricardo Aguirre, César Barbero, Hernán San Martín, Anahí Dello Russo, Melisa Mangini, Marcelo Cardós, Bárbara Zorba, Liliana Nucetelli, Valeria Cano Kelly, Paula Vizzarri, Florencia Muratore y Laura Epelbaum.

La redacción de este texto fue posible gracias a la confianza depositada en el autor por las autoridades del Departamento de Matemática, tanto en la designación en el cargo de profesor titular como en la asignación de la coordinación, junto a Ana Alonso, de la cátedra de Análisis Matemático I para el CiBEx.

La Plata, 25 de abril de 2017

La filosofía está escrita en este inmenso libro
que continuamente está abierto a nuestros ojos, me refiero al Universo,
más no se la puede comprender si primero no nos detenemos a
conocer la lengua y los caracteres en que está escrita.
Esta lengua es la matemática ....

GALILEO GALILEI, IL SAGGIATORE, 1623.

Índice general

INTRODUCCIÓN III

Capítulo 1. Funciones numéricas 1
1.1 Números reales . . . 1
1.2 Funciones . . . 11
1.3 Operaciones entre funciones . . . 27
1.4 Funciones especiales . . . 37
1.5 Modelos, magnitudes y unidades. . . . 52

Capítulo 2. Límites y continuidad 54
2.1 Límite de una función $f(x)$ para x tendiendo a un valor finito . . . 54
2.2 Reglas para el cálculo de límites . . . 66
2.3 Continuidad y discontinuidades. Teorema del Valor Intermedio . . . 80

Capítulo 3. Derivadas 89
3.1 Cociente incremental y derivada . . . 89
3.2 Derivada y aproximación lineal . . . 102
3.3 Función derivada . . . 105
3.4 Reglas prácticas para el cálculo de derivadas . . . 107

Capítulo 4. Crecimiento y concavidad 118
4.1 Nociones de crecimiento. . . . 118
4.2 Estudio del crecimiento en intervalos . . . 122
4.3 Extremos locales y absolutos . . . 129
4.4 Concavidad y derivada segunda . . . 139

Capítulo 5. Límites al infinito y comportamientos asintóticos 146
5.1 Límite de una función $f(x)$ para x tendiendo a infinito . . . 146
5.2 Reglas prácticas para calcular límites para la variable tendiendo a infinito . . . 153
5.3 Crecimiento al infinito . . . 160
5.4 Integración de conceptos: análisis esquemático de gráficas . . . 165

Capítulo 6. Funciones inversas 171
6.1 Funciones inversas . . . 171
6.2 Inversas de las funciones especiales. . . . 182
6.3 Continuidad y derivada de funciones inversas . . . 189

Capítulo 7. Integrales 195
7.1 Integral de Riemann . . . 195
7.2 Propiedades de la integral de Riemann . . . 204

7.3 Teoremas del cálculo integral 211

Capítulo 8. Técnicas de integración 223
8.1 Cálculo de primitivas 223
8.2 Técnicas de integración: integrales por sustitución 229
8.3 Técnicas para calcular primitivas: integración por partes 234
8.4 Recomendaciones para buscar primitivas 239

Capítulo 9. Aplicaciones y extensiones del cálculo integral 250
9.1 Planteo del cálculo de cantidades acumuladas 250
9.2 Funciones especiales definidas como integrales 257
9.3 Ecuaciones diferenciales 261
9.4 Integrales impropias 271

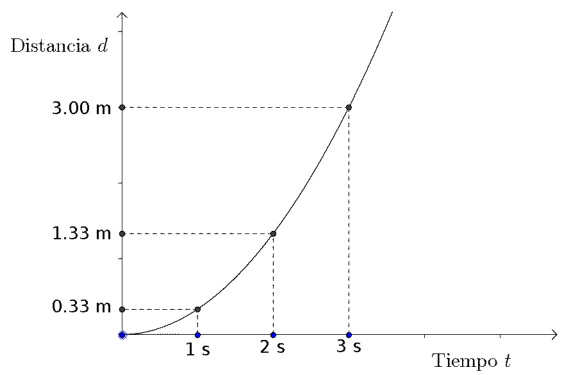
Capítulo 10. Aproximaciones polinómicas 284
10.1 Aproximación lineal y aproximaciones polinómicas 284
10.2 Margen de error en las aproximaciones polinómicas. Aplicaciones. 294

Índice alfabético 301

Bibliografía 303

INTRODUCCIÓN

En este texto trabajaremos con funciones: el lenguaje matemático para expresar relaciones entre distintas magnitudes que hacen a la descripción de una situación en Ciencias. Leamos como ejemplo la información que nos proporciona este gráfico:

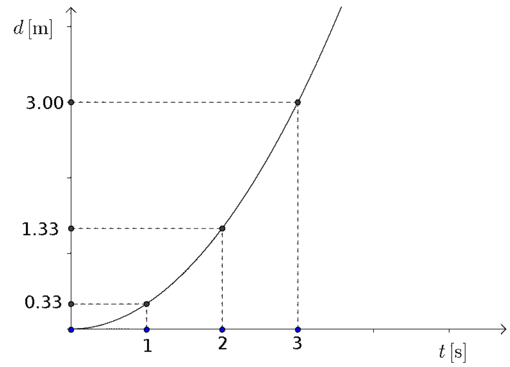


Antes de observar la curva dibujada, notemos que las magnitudes involucradas se indican en cada eje: vemos que se habla de una distancia, simbolizada por la letra d, que varía de acuerdo al valor de una medida de tiempo, simbolizada por la letra t. Vemos también las unidades utilizadas para interpretar puntos en los ejes: los números en el eje t se entienden en segundos y los números del eje d se entienden en metros. Ya podemos imaginar que el gráfico describe el movimiento de un objeto, cuya distancia a cierto punto de referencia va en aumento con el transcurso del tiempo. Tomen papel y lápiz para hacer un esquema de la situación detrás del gráfico: el objeto, el recorrido, la posición en distintos momentos, etc.

Ahora sí, mirando la curva, podemos leer información precisa sobre los valores de la distancia entre el objeto y el punto de referencia, para algunos valores de tiempo transcurrido:

$t\,[s]$	$d\,[m]$
0	0
1	0.3
2	1.3
3	3

En esta tabla usamos una notación especial: $t\,[s]$ significa que los valores de tiempo, escritos más abajo sin unidades, se entienden en segundos; $d\,[m]$ significa que los valores de distancia en la segunda columna se entienden en metros. Esta notación es estándar en textos científicos, y nos alivia de repetir las unidades cada vez que expresamos un valor. También se usa para marcar los ejes de un gráfico, y no repetir las unidades junto a cada valor:



Además de los valores marcados con puntos, el gráfico permite leer valores intermedios. Por ejemplo, cuando $t = 1,5\,s$, la distancia parece ser $d = 0,8\,m$, aproximadamente. En realidad, podemos investigar tantos valores de tiempo como queramos, y sus correspondientes distancias. Entonces, ¿cuántos puntos contiene el gráfico?

Una suposición implícita en el gráfico, y en la mayoría de los modelos matemáticos utilizados al describir una situación en Ciencias, es que las variables involucradas toman valores en un continuo, con incrementos tan finos como uno quiera considerar. Dicho de otra manera, en nuestro ejemplo, el tiempo y la distancia se describen con *números reales.* Por eso comenzaremos nuestro curso repasando el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales.

Otra suposición implícita en los modelos matemáticos con que describimos la Naturaleza es que existan relaciones matemáticas para relacionar las variables involucradas, haciendo algunos cálculos. En nuestro gráfico, la fórmula detrás de escena podría ser

$$d(t) = \frac{1}{3}\,\frac{m}{s^2}\,t^2,$$

como podemos comprobar evaluando la distancia $d(t)$ propuesta para varios valores de tiempo t. En esta expresión también usamos una notación especial, estándar en textos científicos: $d(t)$ indica que la variable d depende de la variable t, es decir que a cada valor de tiempo le corresponde una y sólo una determinada distancia entre el objeto y el punto de referencia.

Siguiendo con el ejemplo, podemos interpretar a partir de la forma de la curva información útil sobre la situación descrita. Por ejemplo,

- el gráfico describe el movimiento solamente a partir de cierto tiempo indicado como $t = 0\,s$, y quizás hasta $t = 4\,s$, ni antes ni después.
- las distancias toman valores entre $d = 0\,m$ y digamos $d = 4\,m$, ni más ni menos.
- el objeto se aleja sostenidamente del punto de referencia, ya que la distancia va en aumento durante todo el tiempo informado.
- el ritmo con que la distancia aumenta al transcurrir el tiempo, usualmente llamado velocidad, se lee por la inclinación del gráfico y va en aumento con el transcurso del tiempo.
- etc.

Todas estas características corresponden a nociones que estudiaremos en este curso, y que son comunes a la descripción de cualquier situación en que una magnitud de interés dependa de otra magnitud. En verdad, estas nociones ocupan más de la mitad de nuestro programa. Otros aspectos, relacionados con acumular o sumar la información contenida en una función, hacen a la segunda parte y creemos que merecen una presentación más adelante.

Podemos anticipar que el estudio de funciones es un entrenamiento de las habilidades que necesitamos para apreciar la información contenida en un gráfico, así como para construir gráficos que describan la situación que estemos estudiando o investigando. Aunque en partes del curso nos parezca que sólo vemos letras, números y fórmulas, no olvidemos nunca que nos estamos entrenando en el lenguaje natural que se utiliza para describir situaciones y modelos de la Naturaleza, para expresarlas y para comprenderlas. Y que el lenguaje gráfico sintetiza la información esencial codificada en una función. De otra manera, sería como aprender un idioma memorizando palabras aisladas; en cambio, cuando podamos mirar la fórmula de una función, visualizar su gráfica y comprender lo que expresa, será como manejar un idioma para expresar ideas.

Bibliografía

Para estudiar un tema, siempre es conveniente mantener una actitud crítica y conocer distintos puntos de vista. A partir de esa diversidad, cada persona construye su propio conocimiento en sintonía con la comunidad en la cual desarrollará su actividad. Esperamos que no se limiten a seguir este texto, sino que lo comparen y enriquezcan con otras fuentes.

La bibliografía referida al Análisis Matemático es extensa y numerosos textos están disponibles en la Biblioteca de la Facultad de Ciencias Exactas. Al final de este libro pueden encontrar algunas referencias sugeridas.

Ejercitación

Este texto está diseñado como material de lectura para acompañar un curso guiado por docentes, quienes propondrán material de trabajo práctico acorde a sus objetivos. La ejercitación aquí incluida es mínima; consiste en una aplicación inmediata de los conceptos introducidos en cada sección con la intención de promover la reflexión, la fijación y la auto-evaluación de contenidos.

Uso de software

Como ya mencionamos, el lenguaje gráfico es esencial para comprender la información contenida en una función de una variable. La tecnología actual no ha dejado de lado este hecho, y contamos con gran variedad de programas con capacidad gráfica y analítica que facilitan el estudio y manejo de funciones. Además, los programas orientados a la educación incorporan herramientas para implementar y visualizar los principales conceptos de los programas de estudio.

En este texto hacemos uso del programa GeoGebra. GeoGebra es un software libre de matemática para educación en todos sus niveles, disponible en múltiples plataformas. Reúne dinámicamente aritmética, geometría, álgebra, cálculo y estadística en un conjunto sencillo a nivel operativo, a la vez que potente. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraica y simbólica, organización en tablas y planillas y hojas de datos. Está recomendado por el Ministerio de Educación de la Nación desde el nivel secundario, por lo cual viene instalado en las computadoras del programa Conectar Igualdad. Se descarga libremente, en español, desde http://www.geogebra.org/cms/es/.

El objetivo principal del uso de software como herramienta de enseñanza-aprendizaje es generar el hábito de analizar mediante gráficos cualquier trabajo hecho en forma analítica; mucho más allá de graficar funciones, se busca la visualización gráfica de conceptos. Por otro lado, el manejo de GeoGebra proporciona una introducción sencilla al uso de software matemático en sistemas más potentes de uso comercial y profesional.

CAPÍTULO 1
Funciones numéricas

Contenidos del capítulo: números reales, intervalos, distancia, desigualdades. Funciones numéricas, dominio, codominio e imagen. Funciones elementales y sus gráficas. Operaciones entre funciones (suma, producto, cociente, composición). Funciones exponenciales y logarítmicas, gráficas y propiedades. Funciones trigonométricas, gráficas y propiedades.

1.1 Números reales

Contenidos de esta sección: números reales. Representación gráfica de números reales. Ecuaciones. Incremento, valor absoluto, distancia. Desigualdades, intervalos, entornos.

1.1.1 Números Reales

En algún momento, en el colegio aprendimos que los números **naturales** son

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

que los números *enteros* contienen a los naturales y sus opuestos,

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

y que los números *racionales* se definen como fracciones con numerador y denominador enteros,

$$\mathbb{Q} = \{p/q : \, p \in \mathbb{Z}, \, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\}$$

También aprendimos a representar (o graficar) números como **puntos de una recta**.

La construcción de los números enteros y racionales es algebraica, basada en sumas, restas, productos y cocientes. Tomando denominadores q arbitrariamente grandes podemos encontrar números racionales arbitrariamente cercanos entre sí, por lo que decimos que $\mathbb{Q}$ es un conjunto denso en la recta numérica.

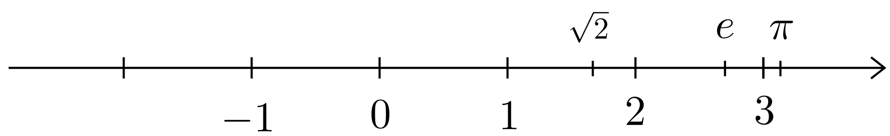
Sin embargo, nos han mostrado también que algunos problemas sencillos tienen resultados que no son números racionales (por ejemplo, medir exactamente la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud $1\,cm$, o medir el perímetro de una circunferencia de radio $1\,m$). A partir de esos ejemplos aceptamos que existen los **números irracionales**. La definición precisa de números irracionales escapa a los programas del colegio, y también a nuestro curso. Nos conformamos con reconocer que los números irracionales están asociados a los puntos de la recta numérica que no se representan como ningún número racional.

Los números irracionales se corresponden uno a uno con puntos de la recta numérica que no se pueden representar como números racionales.

En notación decimal los números irracionales se caracterizan por representarse con infinitas cifras decimales no periódicas.

Los **números reales** son la unión de los números racionales y los números irracionales. Gráficamente, lo que hacemos es asociar cada punto de la recta con un y solo un número real.

Los **números reales** *se corresponden uno a uno con los puntos de la recta numérica. El conjunto de números reales se anota* $\mathbb{R}$.



A partir de esta presentación, aceptamos que no es fácil definir formalmente $\mathbb{R}$. Afortunadamente, la comunidad de matemáticos ha completado en forma rigurosa a la noción de números reales y a sus propiedades, incluyendo las operaciones de suma, resta, producto, cociente, potencias, raíces, etc. Para seguir este curso nos conformamos con una noción gráfica y con que operen correctamente con números reales. Si necesitan repasar el manejo de operaciones numéricas, soliciten a sus docentes algún material que pueda ser útil para alcanzar el nivel apropiado.

Actividades

Actividad 1.1.1.1. Grafiquen los siguientes números:

$$5,\ -2,\ 1.7,\ -\frac{2}{5},\ 4\times 10^{-2},\ -0.003,\ -10^2,\ \sqrt{3},\ -\pi/3,\ e^2,\ \text{etc.}$$

GeoGebra 1.1.1.2. Pueden aprovechar este primer ejercicio para graficar puntos en la computadora. GeoGebra trabaja en el plano; para definir un punto escriban en la línea de "Entrada" la instrucción:

```
(x,y)
```

que define y muestra en el plano un punto de coordenadas cartesianas (x, y). Noten que aparece una letra mayúscula como nombre del punto. Para elegir el nombre, conviene declararlo en la entrada:

```
P=(x,y)
```

Para graficar un número x en el eje real horizontal deben darle coordenadas $(x, 0)$.

1.1.2 Expresiones matemáticas y ecuaciones

Llamamos **expresión matemática** a una serie de operaciones entre números y letras que conduzca a un resultado. Por ejemplo,

$$5x^2 - 3$$

es una expresión matemática cuadrática, donde x representa un número indeterminado.

Las **ecuaciones** son igualdades entre expresiones matemáticas que aparecen naturalmente al plantear relaciones entre distintas cantidades representadas por expresiones matemáticas. Para ser precisos, llamamos **ecuación en una incógnita** x a una igualdad entre expresiones matemáticas que contienen a esa incógnita. Por ejemplo,

$$2x^2 - 6x = 20.$$

Y llamamos **solución de la ecuación** al conjunto S de valores de x que satisfacen la ecuación (es decir, al ser reemplazados en la ecuación verifican la igualdad). En este caso la solución es $S = \{-2, 5\}$ y contiene dos elementos. También se suele decir que la ecuación tiene dos soluciones, $x = -2$ y $x = 5$.

Para seguir este curso, necesitamos resolver con seguridad algunas ecuaciones, comenzando por las lineales y las cuadráticas.

Actividades

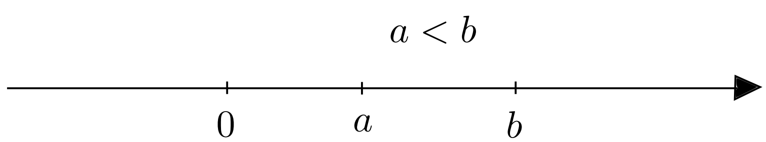
Actividad 1.1.2.1. Resuelvan las siguientes ecuaciones:

1. $5x - 3 = 4x + 2$
2. $3x^2 + 7x - 8 = 0$
3. $\frac{x^2-4}{x-2} = 2x + 1$
4. $x^2 = 4$

No olviden verificar cada solución en la ecuación original.

1.1.3 Relación de orden

En $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{R}$, tiene sentido ordenar los números, es decir preguntarnos cuál es menor entre dos números dados. Gráficamente, a **es menor que** b si a se representa a la izquierda de b en la recta numérica. A esta relación la anotamos en lenguaje matemático como $a < b$. También podemos describir la misma situación diciendo que b **es mayor que** a, y lo anotamos con $b > a$. Entre dos números a y b distintos siempre hay un **orden estricto**.



La relación de orden puede ser **amplia**, en el sentido de permitir que los dos números sean iguales: se anota $a \leq b$, y se lee a **es menor o igual que** b, para expresar que a no es mayor que b. Es decir, cabe la posibilidad de que $a < b$ o bien que $a = b$.

Las siguientes propiedades son útiles para operar con desigualdades entre números reales:

- *Supongamos $a \leq b$. Entonces,*
  - *para todo $c \in \mathbb{R}$, $a + c \leq b + c$*
  - *Si $c \leq d$, entonces $a + c \leq b + d$*
  - *Si $c > 0$, entonces $ac \leq bc$*
  - *Si $c < 0$, entonces $ac \geq bc$*

Signo de un número

Un número real dado puede ser **positivo**, **negativo** o **nulo**. Esto significa compararlo con el número 0. Decimos que

- x es **positivo** si $x > 0$
- x es **negativo** si $x < 0$
- x es **nulo** si $x = 0$. El número 0 no tiene signo.

Cadenas de desigualdades

Se pueden usar desigualdades encadenadas, como

$$a < b < c$$

Esta es una forma abreviada de indicar dos desigualdades que se verifican simultáneamente; significa que $a < b$ **y** que $b < c$. Así, por ejemplo, $2 < x < 4$ indica que $x > 2$ y que $x < 4$; gráficamente, x se encuentra entre 2 y 4.

Intervalos

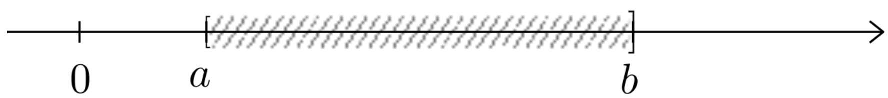
Los conjuntos de números reales que van desde un punto a otro se llaman **intervalos** . En notación de conjuntos se expresan mediante desigualdades; por ejemplo,

$$\{x \in \mathbb{R} : \ 2 \leq x \leq 4\}$$

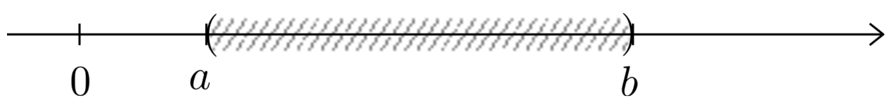
se lee como el conjunto de números reales que van desde 2 inclusive hasta 4 inclusive.

Los intervalos se usan con frecuencia en el Análisis Matemático, por lo que tienen notaciones específicas: en general se anota un paréntesis para indicar un **extremo abierto** (cuando el punto extremo no se incluye en el intervalo) y se anota un corchete para indicar un **extremo cerrado** (cuando el punto extremo sí se incluye en el intervalo). Deben reconocer los siguientes casos:

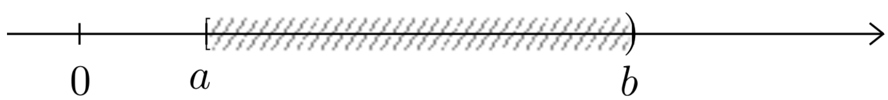
- Intervalos cerrados (incluyen los extremos): $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$



- Intervalos abiertos (no incluyen los extremos): $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$

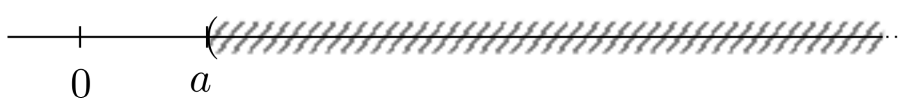


- Intervalos semiabiertos -o semicerrados- (incluyen un solo extremo):
  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$,
  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$



También se introducen los **intervalos infinitos**, cuyas notaciones son:

- Semirrectas a la derecha: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x\}$, $\quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x\}$
- Semirrectas a la izquierda: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\}$, $\quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ x < b\}$



Estos intervalos tienen un extremo real pero son no acotados por el otro extremo. El símbolo $+\infty$ se lee "más infinito" y no es un número real, sino que se usa para indicar que el intervalo contiene números reales mayores que cualquier tope dado; de la misma manera, el símbolo $-\infty$ se lee "menos infinito" y se usa para indicar que el intervalo contiene números reales menores que cualquier tope dado.

Inecuaciones (desigualdades)

Un tipo de problema asociado a las desigualdades es encontrar una región del eje real que cumpla con ciertas restricciones. Por ejemplo, se busca ubicar los valores de una variable x tales

$$2x + 3 < 7x - 5.$$

Para ser precisos, llamamos **inecuación en una incógnita** x a una desigualdad entre dos expresiones matemáticas que dependen de x, y llamamos **solución de la inecuación** al conjunto S de valores de x que satisfacen la desigualdad. Típicamente el conjunto solución estará dado por uno o más intervalos.

Ejemplo 1.1.3.1. Veamos cómo encontrar los números x que verifiquen la desigualdad

$$2x + 3 < 7x - 5$$

Usaremos varias de las propiedades listadas antes, como sumar una misma cantidad o multiplicar por una constante a ambos miembros de la desigualdad.

$$\begin{aligned}
2x + 3 &< 7x - 5 \\
2x + 3 - 3 &< 7x - 5 - 3 \\
2x &< 7x - 8 \\
2x - 7x &< 7x - 8 - 7x \\
-5x &< -8 \\
\left(-\frac{1}{5}\right)(-5x) &> \left(-\frac{1}{5}\right)(-8) \\
x &> \frac{8}{5}
\end{aligned}$$

Observen especialmente que al multiplicar ambos miembros por el número negativo $-1/5$ la desigualdad cambia de sentido.

La solución es el intervalo $\left(\frac{8}{5}, +\infty\right)$. Verifiquen con algunos valores en ese intervalo que la desigualdad se satisface, y verifiquen también que con valores fuera del intervalo la desigualdad no se cumple.

El mecanismo que hemos utilizado se puede recordar mediante reglas de pasaje de términos y factores: por ejemplo, al sumar 3 a ambos miembros del primer renglón logramos pasar el 3 que estaba sumando en el lado izquierdo como un 3 que queda restando en el lado derecho. Sin embargo, recomendamos operar usando propiedades como en este ejemplo.

Signo de una expresión matemática

Cuando queramos averiguar el signo de una expresión que depende de x, tendremos que escribir una inecuación comparando la expresión con cero. Es un caso importante de inecuaciones que aparece con frecuencia en el resto del curso.

Ejemplo 1.1.3.2. Averigüemos en qué intervalos es positiva, y en qué intervalos es negativa, la expresión $x^2 - 1$.

Para ver dónde es positiva, planteamos

$$x^2 - 1 > 0$$

Conviene factorizar $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ y escribir la inecuación

$$(x + 1)(x - 1) > 0$$

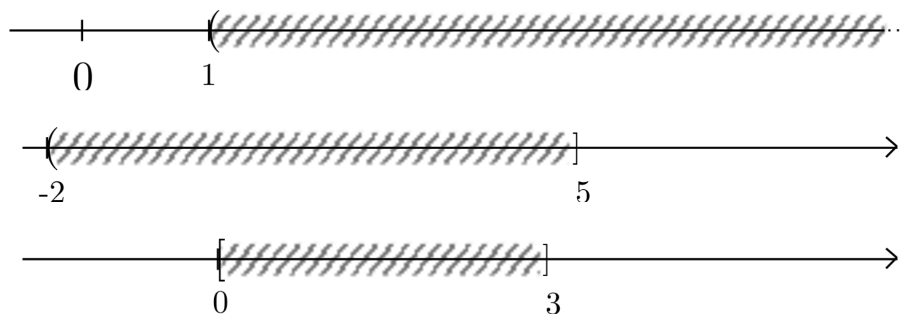
Un análisis de signos nos muestra que el producto será positivo cuando ambos factores sean positivos, o cuando ambos sean negativos. En el primer caso debe ser $x > -1$ y $x > 1$, que se cumple en el intervalo $(1, +\infty)$. En el segundo caso necesitamos que $x < -1$ y $x < 1$, que se cumple en el intervalo $(-\infty, -1)$. La solución completa es la unión de ambos casos, que se puede anotar como

$$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

Por otro lado, para que el producto sea negativo, se plantea $(x + 1)(x - 1) < 0$. En este caso un factor debe ser negativo y el otro positivo. Encuentren ustedes que esto sucede en el intervalo $(-1, 1)$.

Actividades

ACTIVIDAD 1.1.3.1. ¿A qué intervalos corresponden los siguientes gráficos?



ACTIVIDAD 1.1.3.2. Resuelvan las siguientes desigualdades, escribiendo el conjunto solución en notación de intervalo. Grafiquen la solución en la recta numérica.

1. $2x - 5 \geq 4$
2. $-1 \leq x + 7 < 6$
3. $(2x - 3)(x + 4) \leq 0$
4. $x^2 + x > 1$

GEOGEBRA 1.1.3.3. GeoGebra puede manejar las desigualdades que hemos propuesto. Para visualizar la solución del ejemplo 1.1.3.1 escriban:

```
2x+3<7x-5
```

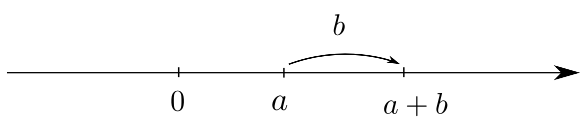
Para visualizar una cadena de desigualdades, y una desigualdad en sentido amplio como en la actividad anterior, pueden escribir:

```
-1<=x+7<6
```

1.1.4 Operaciones geométricas en la recta real

Desplazamientos

Dado un número real a, que ubicamos en la recta, y otro número real b, el resultado de la suma $a + b$ es un número **desplazado** a partir de a en una cantidad b.



Es importante reconocer que sumar un número positivo produce un desplazamiento hacia la derecha, y que sumar un número negativo equivale a restar, produciendo un desplazamiento hacia la izquierda.

Dados dos números a y b, siempre podemos escribir

$$b = a + (b - a).$$

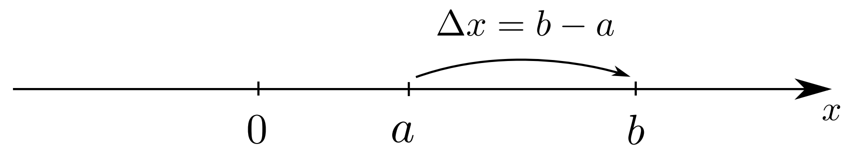
En palabras, el desplazamiento necesario para ir desde a hasta b se obtiene haciendo $b - a$.

Notación: se llama **incremento** al desplazamiento que lleva de un punto a otro. Cuando se trabaja con una variable x sobre el eje real, un incremento se anota como Δx (que se lee "Delta x").

Recordemos que el **incremento** *para ir desde a hasta b se calcula*

$$\Delta x = b - a$$

En un gráfico se dibuja

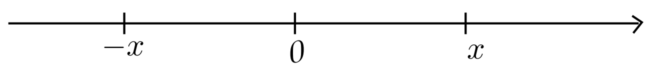


Dilataciones y contracciones

Para hacer un zoom en la posición de números en la recta, basta multiplicarlos por una constante positiva c, que llamaremos factor de escala. Dado un conjunto de números $\{x_1, x_2, \cdots\}$ y un factor de escala $c > 1$, el conjunto de números $\{cx_1, cx_2, \cdots\}$ se verá **dilatado** respecto del original. Si el factor de escala es $c < 1$, el conjunto de números se verá **contraído** respecto del original.

Reflexión respecto del origen

El opuesto de un número real x se define como el número$-x$. Esto equivale a a un cambio de signo y se visualiza como una **reflexión** respecto del origen (es decir, del punto $x = 0$).



Actividades

Actividad 1.1.4.1. Propongan un conjunto de números positivos y negativos. Grafiquen con un color el conjunto, con otro color el doble de esos números, y con otro color la mitad de esos números.

Con otro color, grafiquen los opuestos.

GeoGebra 1.1.4.2. Para hacerlo con GeoGebra, pueden definir un conjunto de puntos escribiéndolos entre llaves. Por ejemplo,

```
A={(1,0),(2,0),(3,0)}
```

Para verlos graficados, deberán clickear el ítem que aparece en el panel "Vista Algebraica".

Ahora pueden crear un conjunto dilatado al doble escribiendo

```
2 A
```

Para cambiar el color de los puntos, deben desplegar el menú contextual haciendo click con el botón derecho del mouse y elegir "Propiedades de Objeto"; pueden hacerlo desde la vista gráfica o desde la vista algebraica.

El conjunto de opuestos se obtiene escribiendo

```
- A
```

Observen que la notación en GeoGebra es muy natural, similar a lo que escriben en sus cuadernos.

1.1.5 Distancia y valor absoluto

Distancia

La distancia entre dos puntos a y b del eje real es una noción muy importante en Análisis Matemático. La podemos calcular a partir del desplazamiento relativo entre dichos puntos.

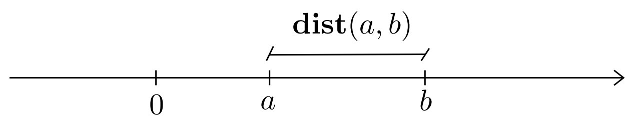
Ya hemos visto que el desplazamiento entre un punto a y otro punto b se expresa como la resta $b-a$, y notamos que el desplazamiento puede ser positivo (cuando $b>a$) o negativo (cuando $b<a$) o incluso nulo (cuando $b=a$).

La **distancia** entre dos puntos a y b se calcula como el desplazamiento, pero siempre con signo positivo. Es decir, calculamos la resta $b-a$ y nos fijamos: si el resultado es positivo (o nulo), esa es la distancia; pero si el resultado es negativo, lo cambiamos por su opuesto $-(b-a)=a-b$, para que la distancia sea positiva.

La **distancia** *entre dos puntos a y b del eje real, que anotaremos $\mathbf{dist}(a,b)$, se calcula como*

$$\mathbf{dist}(a,b)=\begin{cases} b-a & si\, b \geq a \\ a-b & si\, b<a \end{cases}$$

Noten que esta definición da **un solo resultado**, aunque haya dos expresiones; hay que **elegir** cuál expresión usar, según la condición que se indica en cada renglón.



Propiedades de la distancia

La distancia tiene tres propiedades características: dados tres números reales, $a,b,c\in\mathbb{R}$,

- $\mathbf{dist}(a,b)\geq 0$, y $\mathbf{dist}(a,b)=0$ solo cuando $a=b$. Esta es la **propiedad de positividad**.
- $\mathbf{dist}(a,b)=\mathbf{dist}(b,a)$. Esta es la **propiedad simétrica**.
- $\mathbf{dist}(a,c)\leq \mathbf{dist}(a,b)+\mathbf{dist}(b,c)$. Esta es la **desigualdad triangular**.

Las asignaciones que verifican estas tres propiedades se llaman en general distancia y se las encuentra en otros conjuntos, además de los números reales. En particular, valen para la distancia entre puntos del plano y del espacio.

Valor absoluto

La operación de tomar un número real y generar otro que sea "igual pero con signo más" va a aparecer con frecuencia en nuestro curso. Para indicar esta operación en forma general, se define el **valor absoluto** de un número: si el número es positivo (o nulo), se lo deja como está, y si es negativo se le cambia el signo:

El **valor absoluto** *de una expresión $a\in\mathbb{R}$, que denotaremos $|a|$, se define como*

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{si } a\geq 0 \text{ (o sea, cuando } a \text{ no es negativa se deja la expresión)} \\ -a, & \text{si } a<0 \text{ (o sea, cuando } a \text{ es negativo se pone el opuesto de la expresión)} \end{cases}$$

Noten nuevamente que esta definición da **un solo resultado**; según el signo de la expresión a hay que decidir cuál renglón usar. El resultado nunca será negativo.

Podemos usar la notación de valor absoluto para calcular distancias, y viceversa. Conviene recordar las siguientes propiedades:

El valor absoluto de un número real representa su distancia al origen,

$$|a|=\mathbf{dist}(a,0)$$

Por ejemplo, $|5|=\mathbf{dist}(5,0)=5$. También $|-5|=\mathbf{dist}(-5,0)=5$.

El valor absoluto de un desplazamiento $b-a$ representa la distancia entre a y b,

$$|b-a|=\mathbf{dist}(a,b)$$

Por ejemplo, $\mathbf{dist}(2,3)=|3-2|=|1|=1$. Por supuesto, tenemos que también $\mathbf{dist}(3,2)=|2-3|=|-1|=1$, ya que la distancia siempre es simétrica.

Presentamos las principales propiedades del valor absoluto:

- $|ab| = |a||b|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, si $b \neq 0$
- $|a^n| = |a|^n$, si $n \in \mathbb{N}$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$. Esta propiedad se llama **desigualdad triangular**. Si a, b tienen el mismo signo (ambos positivos o ambos negativos), entonces vale el igual, $|a + b| = |a| + |b|$

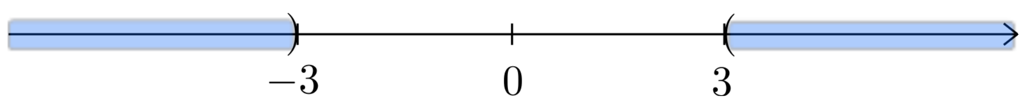
Conjuntos de puntos caracterizados por distancias

Las soluciones de inecuaciones representan, en general, conjuntos de puntos en el eje real. Nos interesan en particular las inecuaciones que involucren distancias: quedan escritas como desigualdades en las que interviene el valor absoluto.

EJEMPLO 1.1.5.1. Ya que el valor absoluto de un número representa su distancia al 0, podemos escribir fácilmente el conjunto de puntos cuya distancia al 0 sea *menor* (o *mayor*) que una distancia prefijada. Así,

$\{x : |x| < 3\} = (-3, 3)$

$\{x : |x| > 3\} = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.



Para resolver estos conjuntos no hemos realizado un "despeje". Más bien interpretamos gráficamente las expresiones como distancias.

EJEMPLO 1.1.5.2. El valor absoluto también nos permite expresar la distancia entre dos números reales. Podemos describir un conjunto de puntos que estén a una distancia dada de algún punto fijo, o que estén **más cerca** que cierta distancia, o que estén **más lejos** que cierta distancia.

Consideren el conjunto $A = \{x : |x - 1| < 3\}$.

Ya que $|x - 1|$ representa la distancia entre un número x y el número 1, el conjunto A indica que nos podríamos mover hasta 3 unidades a la derecha (sin llegar al punto $1 + 3 = 4$), o bien hasta 3 unidades a la izquierda (sin llegar al punto $1 - 3 = -2$). Es decir, el conjunto A se puede graficar como

Observemos que -2 y 4 no pertenecen a A, ya que se pide que la distancia de x a 1 sea menor que 3. En notación de intervalos, el conjunto solución es $(-2, 4)$.

Siempre que sea posible, convendrá trabajar las desigualdades que incluyan valores absolutos razonando con distancias.

EJEMPLO 1.1.5.3. Resolvamos la inecuación

$$|-5x + 2| > 1$$

Podemos usar un poco de álgebra y propiedades del valor absoluto para reescribir

$$|-5x+2| = |-5\,(x-2/5)\,| = |-5||x-2/5| = 5|x-2/5|$$

El problema original queda escrito como

$$5|x-2/5| > 1$$

que es equivalente a

$$|x-2/5| > 1/5$$

La solución está dada por los puntos cuya distancia al punto $2/5$ es mayor que $1/5$. Hacia la izquierda encontramos el intervalo $(-\infty, 1/5)$ y hacia la derecha encontramos el intervalo $(3/5, +\infty)$. La solución completa es la unión de intervalos $(-\infty, 1/5) \cup (3/5, +\infty)$.

Entornos

Los conjuntos de puntos que están alrededor de un punto dado y hasta cierta distancia dada, como en el ejemplo 1.1.5.2, reciben un nombre particular:

Al conjunto de puntos cuya distancia a un punto fijo a es menor que r unidades se lo denomina **entorno abierto de centro a y radio r**. *En notación de conjuntos, se caracteriza como*

$$\{x : \ \mathbf{dist}(x,a) < r\}$$

Un **entorno de centro a y radio r** también se puede anotar como un intervalo $(a-r, a+r)$, o como una desigualdad $a-r < x < a+r$. Conviene interpretarlo como el conjunto de **puntos vecinos** a a, donde la distancia r indica que entendemos por "vecino".

Actividades

Actividad 1.1.5.1. Calculen, grafiquen y midan sobre el gráfico la distancia entre los puntos

2 y 4; 4 y 2; -3 y -5; -2 y 3; 5 y 0; -5 y 0

Actividad 1.1.5.2. Despejen x de las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

1. $|2x| = 3$
2. $|2x| \leq 3$
3. $|3x+5| = 1$
4. $|3x-5| \geq 1$
5. $0 < |x-3| < 0.001$. ¿Qué diferencia tiene este conjunto con $|x-3| < 0.001$?
6. $x^2 - 9 < 0$

GeoGebra 1.1.5.3. GeoGebra puede calcular la distancia entre dos puntos P y Q ya definidos escribiendo

```
Distancia[P,Q]
```

Para escribir el valor absoluto de una expresión no pueden usar barras; deben usar la función "abs". Por ejemplo, $|2x+1|$ se escribe

```
abs(2x+1)
```

Para interpretar el gráfico resultante conviene leer la próxima sección.

1.2 Funciones

Contenidos de esta sección: funciones numéricas: dominio, codominio, imagen. Gráficas. Funciones elementales.

1.2.1 Funciones numéricas

Las ciencias experimentales describen situaciones de la Naturaleza midiendo diversas magnitudes: temperatura, presión, distancias, tiempo, volumen, concentraciones, etc. El valor de estas magnitudes cambia según la situación experimental, por lo cual se las llama variables. Hay magnitudes de observación directa que naturalmente se consideran variables independientes, como el transcurso del tiempo medido con un reloj. En cambio hay magnitudes que dependen del valor de otras variables; por ejemplo

- la temperatura ambiental (depende de la hora en la que se la mide);
- el área de un rectángulo (depende de las longitudes de su base y su altura);
- el perímetro de un cuadrado (depende de la longitud de un lado);
- etc.

En este curso estamos interesados en aquellas relaciones que, dependiendo del valor de **una sola variable**, nos dan **una única respuesta**. Esto es lo que llamamos una **función** de una variable.

Vamos a formalizar este concepto con una definición:

> *Dados dos conjuntos A y B, una* **función** $f:\ A \to B$ *es una relación que asigna a cada elemento $x \in A$ un y solo un elemento $y \in B$. Para todo $x \in A$, esta asignación se anota como $y = f(x)$.*

En esta definición llamamos f a la función, llamamos x a la variable independiente y llamamos A al conjunto de valores que x puede tomar. Por otro lado llamamos y a la variable que depende de x y llamamos B al conjunto de valores que puede tomar y. Que f sea una función significa que no puede existir elemento de A sin su correspondiente elemento en B, y que a cada elemento de A no le puede corresponder más de un elemento de B como resultado.

Por ejemplo,

- a cada persona se le asigna su nombre: es una función, ya que todos tenemos un nombre (aunque coincida con el nombre de otro)
- a cada persona se le asigna el nombre de su hijo: no es una función, ya que hay personas que no tienen hijos, y otras que tienen más de uno
- el número de bacterias de un cultivo según el momento en que se lo observa: sí es una función
- el perímetro de un cuadrado según la longitud de un lado: sí es función; es más, si llamamos l a la longitud del lado, y p al perímetro, podemos con geometría elemental escribir una fórmula de asignación $p(l) = 4\,l$.

Dominio, codominio, regla de asignación, dominio natural

Es importante que aclaremos algunos nombres:

> *Dada una función $f:\ A \to B$, el conjunto A se llama* **dominio** *y la variable $x \in A$ se llama* **variable independiente**. *El conjunto B se llama* **codominio** *de la función y la variable $y \in B$ se llama* **variable dependiente**.

Al dominio se lo suele anotar $\mathbf{Dom}\, f$. En este curso trabajaremos con funciones numéricas: el dominio y el codominio serán siempre un conjunto de números reales. En las aplicaciones estos números tienen unidades (por ejemplo: tiempo en segundos, precios en pesos, etc.) y representan valores de magnitudes de interés.

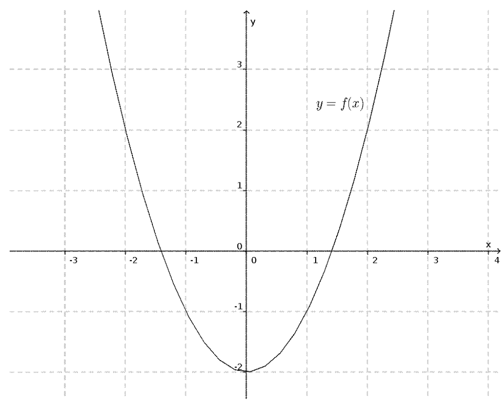
La relación entre la variable independiente x y la variable dependiente y se puede dar de distintas maneras, siempre que resulte claro y preciso qué valor de y corresponde a cada valor de x. En general la podemos llamar

regla de asignación y se simboliza por $y = f(x)$ (que se lee "y es f de x" y significa "y es el valor de f cuando la variable independiente vale x").

Las funciones se representan por letras. En los textos de matemática las letras más usadas son f, g, h, así como las letras más usadas para indicar la variable independiente son x o t.

Las maneras más usuales de expresar una regla de asignación $y = f(x)$ son:

- Una **gráfica**, donde se puedan ubicar los valores de x y se puedan leer los correspondientes valores de y:



- Una **tabla de valores**, a dos columnas, donde se puedan ubicar los valores de x y se puedan leer los correspondientes valores de y:

x	y
-1	-1
0	-2
1	-1
2	2

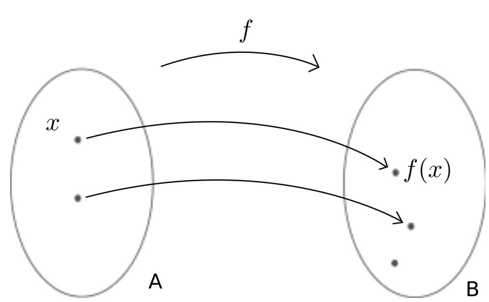
- Una **fórmula** o expresión matemática, donde se puedan introducir los valores de x y producir, mediante un cálculo, los correspondientes valores de y:

$$f(x) = x^2 - 2$$

- Un **mecanismo** (por ejemplo un programa de computadora), que tomando un valor de x produzca un valor de y:

```
for x in [-1,0,1,2]:
    print x*x-2
```

En un esquema de conjuntos, sencillo y general, podemos reconocer todos los ingredientes de una función:



Cuando podemos expresar una función de variable real con una fórmula, tenemos la información más completa y precisa: podemos elegir cualquier valor de x en el dominio, con tantos decimales como queramos, y calcular exactamente el valor $y = f(x)$.

Cuando podemos expresar la función mediante un gráfico, tenemos la información fácil de interpretar y recordar. Sin embargo, el gráfico siempre se restringe a un segmento del dominio y no brinda precisión numérica. Por otro lado, una tabla de valores contiene solo algunos pocos pares de valores (x, y) que apenas ilustran la función.

En nuestro curso, como en otros textos de Análisis Matemático, nos enfocaremos en funciones numéricas dadas por fórmulas, y en sus gráficos. El dominio y codominio suelen no estar escritos explícitamente; utilizaremos la siguiente convención:

> *Dada una función f mediante su fórmula matemática $y = f(x)$, llamamos* **dominio natural** *de f al mayor conjunto de números reales tales que la fórmula permita calcular un resultado real.*
> *Si el codominio no está indicado, asumimos que es $\mathbb{R}$.*

EJEMPLO 1.2.1.1. El dominio natural de $f(x) = x^2 - 2$ es $\mathbb{R}$, ya que no hay obstáculos para calcular $x^2 - 2$. Algunos de sus valores son: $f(0) = -2,\ f(2) = 2^2 - 2 = 2,\ f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2,$ etc.

El dominio natural de $g(x) = \sqrt{x}$ es el intervalo $[0, +\infty)$ porque la raíz cuadrada de números negativos da resultados complejos, fuera de los reales. Algunos de sus valores son: $g(0) = 0,\ g(4) = \sqrt{4} = 2,$ etc.

Imagen

La variable dependiente de una función no siempre alcanza todos los valores del codominio declarado. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ nunca toma valores negativos. Se llama **imagen de una función** al conjunto de todos los valores efectivamente alcanzados por la función:

> *Dada una función $f : A \to B$, se llama* **imagen** *de f al conjunto de elementos de B que son el resultado de $f(x)$ para algún elemento x de A.*

En palabras, la imagen de f es el conjunto de **todos los valores que toma** $f(x)$ cuando x recorre todo el dominio A. Lo anotaremos $\mathbf{Im}\, f$ o $f(A)$. En notación de conjuntos, se define

$$\mathbf{Im}\, f = \{f(x) :\ x \in A\}$$

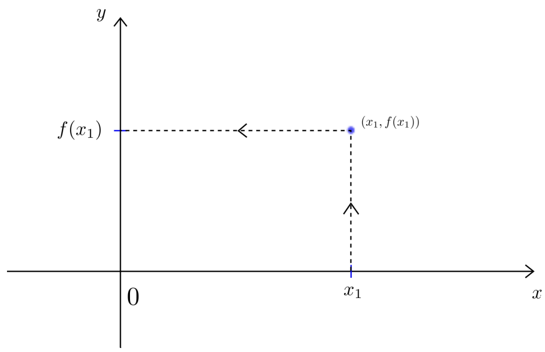
Calcular la imagen de una función no es una tarea trivial. Por ejemplo, para $f(x) = x^2$ tenemos que $\mathbf{Im}\, f = [0, +\infty)$ porque los resultados de x^2 pueden ser arbitrariamente grandes pero no pueden ser negativos.

Veremos durante el curso distintas herramientas para analizar una función y, entre otras cosas, descubrir su imagen.

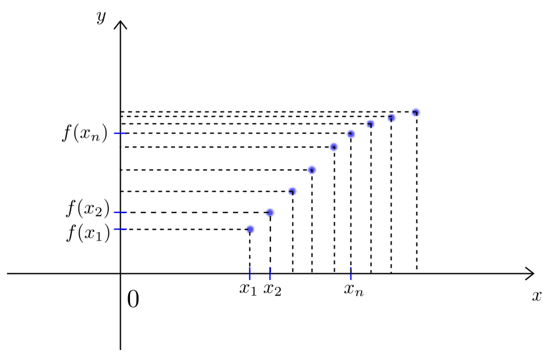
Gráfica de una función

Vamos a precisar los elementos con que dibujamos la gráfica de una función numérica. Necesitamos indicar el conjunto dominio, sobre un eje real, y el codominio sobre otro eje real. Para eso utilizamos el plano coordenado $\mathbb{R}^2$: ubicamos los valores de la variable independiente, es decir el dominio de la función, en el eje horizontal, y los valores de la variable dependiente en el eje vertical. El eje horizontal se llama eje de **abscisas**, y el eje vertical se llama eje de **ordenadas**.

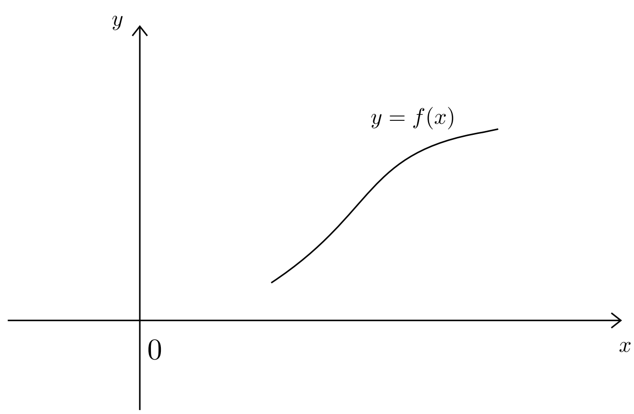
Dado un valor $x_1 \in \mathbf{Dom}\, f$, lo ubicamos en el eje de abscisas y luego calculamos y ubicamos el correspondiente valor $y_1 = f(x_1)$ en el eje de ordenadas. El punto (x_1, y_1) en el plano representa que a x_1 se le asigna el valor y_1; podemos dibujarlo junto con la flecha que va de x_1 a $f(x_1)$:



Ahora indicamos de la misma manera varios valores $x_2,\ x_3, \cdots$ y sus correspondientes imágenes $f(x_2),\ f(x_3), \cdots$:



En general el $\mathbf{Dom}\, f$ es un intervalo, donde los valores de x forman un continuo; imaginemos que repetimos lo anterior con los infinitos puntos intermedios. Vemos que los puntos de la gráfica de f forman una curva en el plano. Eso es lo que indicamos cuando trazamos una gráfica, con una curva como



La **gráfica** *de una función $y = f(x)$ es el conjunto de todos los puntos del plano con coordenadas $(x, f(x))$, con $x \in \mathbf{Dom}\, f$.*

En notación de conjuntos,

$$\text{gráfica de } f \ = \{(x,y) :\ x \in \mathbf{Dom}\, f \text{ e } y = f(x)\}$$

o bien

$$\text{gráfica de } f \ = \{(x, f(x)) :\ x \in \mathbf{Dom}\, f\}$$

Dado que la gráfica de una función es un conjunto de puntos, podemos hablar de pertenencia. Por ejemplo, si f es la función con regla de asignación $f(x) = 2x + 3$ y dominio real, el punto $(0, 3)$ pertenece a la gráfica de f porque $f(0) = 3$. En cambio $(1, 2)$ no pertenece a la gráfica de dicha función porque $f(1) = 5 \neq 2$.

Igualdad de funciones

Diremos que dos funciones f y g son **iguales** cuando

1. tienen el mismo dominio,
2. para cada x del dominio, la regla de asignación da el mismo resultado: $f(x) = g(x)$

EJEMPLO 1.2.1.2. La función dada por $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ tiene dominio natural $\mathbf{Dom}\, f = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ porque no está definida para $x = -2$.

Operando algebraicamente,

$$\frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = x - 2$$

siempre que $x \neq -2$.

Por otro lado, la función dada por $g(x) = x - 2$ tiene dominio natural $\mathbf{Dom}\, g = \mathbb{R}$.

Observen que aunque las fórmulas de f y g dan los mismos resultados casi en todos lados, las funciones **no son iguales** porque sus dominios son diferentes.

Actividades

ACTIVIDAD 1.2.1.1. Para fijar conceptos, consideren las siguientes preguntas:

- Si les dan la gráfica de una función,
  - ¿Cómo reconocen su dominio?
  - ¿Cómo leen el valor de la función para un cierto valor de la variable independiente?
  - ¿Cómo reconocen la imagen de la función?

ACTIVIDAD 1.2.1.2. Construyan la gráfica de $f(x) = (x+1)^2 - 4$, con ayuda de una tabla de valores. Verifiquen en forma gráfica y en forma analítica que $(2, 5)$ y $(0, -3)$ pertenecen a la gráfica, pero que $(-1, 1)$ no pertenece a la misma.
¿Cuánto debería valer b para que $(-1, b)$ pertenezca a la gráfica?

GEOGEBRA 1.2.1.3. Para graficar una función basta escribirla en la línea de entrada. Por ejemplo,

```
f(x)=(x+1)^2-4
```

El programa elige una "ventana" del gráfico, es decir un rango de valores de x y un rango de valores de y. Esta ventana se puede modificar con el mouse. Intenten desplazar la ventana, ampliarla o ver en detalle una parte del gráfico. Encontrarán herramientas adecuadas en la barra de herramientas.

Podemos hacer mucho más que graficar:

- Es muy interesante colocar puntos sobre la gráfica de la función. Se hace con la herramienta "Nuevo Punto" en la barra de herramientas.
- GeoGebra entiende que el punto pertenece a la gráfica, y ajusta su posición con precisión: verán en el panel de vista algebraica las coordenadas (x, y) del punto. Estos valores de x e y se pueden leer como un **renglón en la tabla de valores** de la función.
- Se puede desplazar un punto sobre la gráfica de una función usando el mouse. Para esto usaremos la herramienta "Elige y Mueve". GeoGebra entiende que si cambiamos el valor de x, debe cambiar el valor de y según la fórmula de la función. En el panel de vista algebraic **podemos ver cómo cambian las coordenadas del punto,** como si recorriéramos una gran tabla de valores.

1.2.2 Funciones inyectivas, suryectivas y biyectivas. Noción de función inversa

Estos nombres se refieren a ciertas características que una función puede cumplir, o no cumplir, y que son fácilmente observables al mirar su gráfica.

Dada una función $f : A \to B$, se dice que la función es **inyectiva** *cuando a valores distintos de $x \in A$ corresponden valores distintos de $y \in B$.*

En palabras, una función inyectiva no repite valores cuando se recorre su dominio A. Gráficamente, una recta horizontal no puede cortar la gráfica de una función inyectiva dos o más veces.

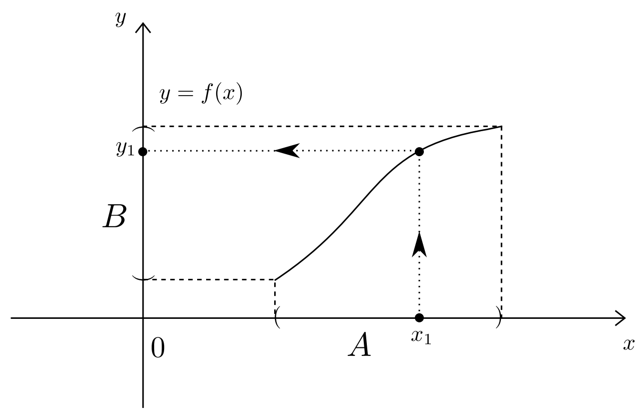
Dada una función $f : A \to B$, se dice que la función es **suryectiva** *cuando $\mathbf{Im}\, f = B$.*

En palabras, una función suryectiva alcanza todos los valores de su codominio B. Gráficamente, toda recta horizontal que pase por el codominio corta a la gráfica de una función suryectiva al menos una vez.

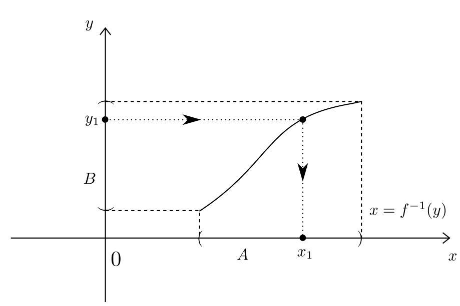
Dada una función $f : A \to B$, se dice que la función es **biyectiva** *cuando es inyectiva y suryectiva a la vez.*

En palabras, una función es biyectiva cuando cada valor de $y \in B$ es alcanzado una sola vez, por un único $x \in A$. Gráficamente, toda recta horizontal que pase por el codominio B corta a la gráfica una y solo una vez.

Cuando una función es biyectiva se dice que hay una **correspondencia biunívoca** entre los conjuntos A y B: por ser f función, cada elemento de A se corresponde con un y solo un elemento de B, mientras que por ser biyectiva cada elemento de B se corresponde con un y solo un elemento de A. La gráfica de una función $f : A \to B$ biyectiva tiene el siguiente aspecto



Esta situación permite, en principio, recuperar valores de x como función de valores de y y construir una **función inversa**, que anotamos $f^{-1} : B \to A$.



Simplemente, se intenta despejar x como función de y, logrando $x = f^{-1}(y)$. Discutiremos el tema de funciones inversas en profundidad en el capítulo 6.

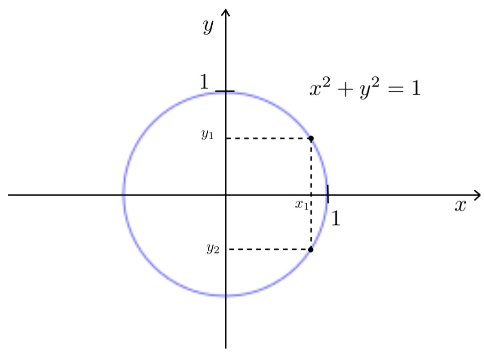
Actividades

Actividad 1.2.2.1. Dibujen la gráfica de una función biyectiva $y = f(x)$ en papel transparente (bastará una hoja en blanco, vista a trasluz). Encuentren la forma de mirarla para visualizar la gráfica de función inversa $x = f^{-1}(y)$, con la variable y en el eje horizontal y la variable x en el eje vertical .

1.2.3 Ecuaciones en dos variables, relaciones y funciones

Cuando analizamos un problema donde hay dos variables x e y, es común plantear relaciones entre ellas. Estas relaciones quedan expresadas como una ecuación en dos incógnitas: una igualdad entre expresiones matemáticas que involucran dos números indeterminados x e y.

Por ejemplo, los puntos de una circunferencia de radio 1 y centro en el origen del plano cartesiano tienen coordenadas x e y tales que $x^2 + y^2 = 1$. Esta ecuación establece una relación entre valores de x y valores de y: los valores relacionados son las coordenadas de puntos que satisfacen la ecuación y dibujan la circunferencia en el plano



Este ejemplo de la circunferencia no determina a y como función de x. Recordemos que en una función $f(x)$, para cada $x \in \mathbf{Dom}\, f$, existe un y solo un valor $f(x)$. Luego, en la gráfica de la función f debe haber un y solo un par ordenado cuya primera coordenada sea x. En particular, no puede haber dos puntos con el mismo x y distintas alturas y, como sucede en la circunferencia.

En general, la gráfica de las soluciones de una ecuación en dos variables es una curva en el plano. Podemos enunciar un criterio para decidir, a partir de la gráfica de una ecuación, si la relación expresada es o no una función: para tener una función, cualquier recta vertical debe cortar a la gráfica a lo sumo una vez (de lo contrario, a un valor de x le corresponderían dos o más valores de y). Además, el dominio de la función estará formado por los valores de x tales que la recta vertical que pasa por $(x, 0)$ corte a la gráfica.

ACTIVIDAD 1.2.3.1. A partir de la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, intenten despejar y como función de x. ¿Encuentran una función? ¿Por qué?

Buscando alternativas, ¿pueden definir alguna función relacionada con la circunferencia? ¿Cuáles serían su dominio, su imagen y su gráfica?

1.2.4 Funciones lineales y constantes. Ecuación de la recta

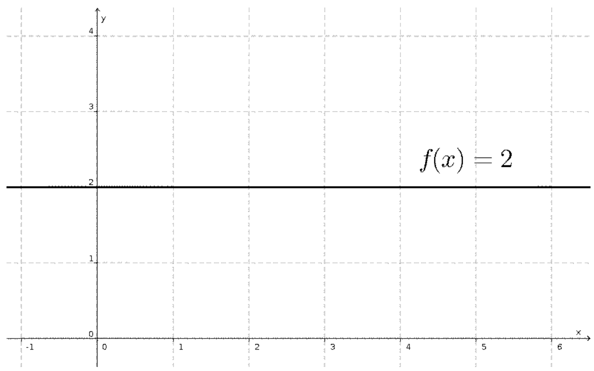
Para incorporar los conceptos de este curso necesitamos que recuerden bien algunas funciones que ya habrán visto en el colegio y quizás también en cursos de ingreso a la Universidad. El objetivo es asociar cada tipo de fórmula con su gráfica, para luego poder reconocerlas y analizarlas rápidamente, incluso sin recurrir a las gráficas de computadora. Las más básicas son las funciones constantes y las funciones lineales, asociadas a la geometría de rectas.

Función constante

Una función constante toma siempre el mismo valor. Su fórmula tiene la forma

$$f(x) = c$$

donde c es un número dado. El valor de $f(x)$ en este caso no depende de x; es decir, para distintos x la función devuelve siempre el mismo resultado c. En consecuencia, la gráfica de $y = c$ es una **recta horizontal**, de altura c.

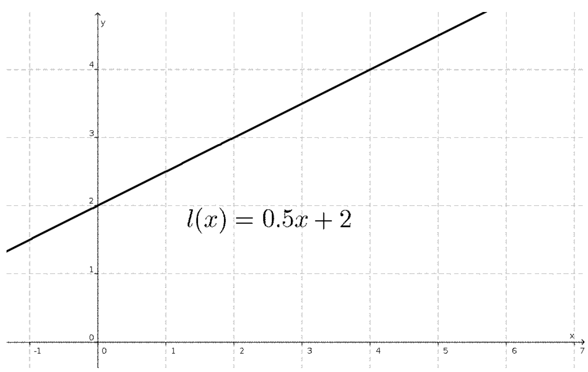


Función lineal

Dados dos números reales m y b, con $m \neq 0$, una función lineal tiene la fórmula general

$$l(x) = mx + b$$

Su gráfica siempre es una **recta inclinada**. Por ejemplo, $l(x) = 0.5x + 2$:



El dominio natural está formado por todo $\mathbb{R}$. Su imagen también es $\mathbb{R}$, porque los valores de $l(x)$ cubren todo el eje y.

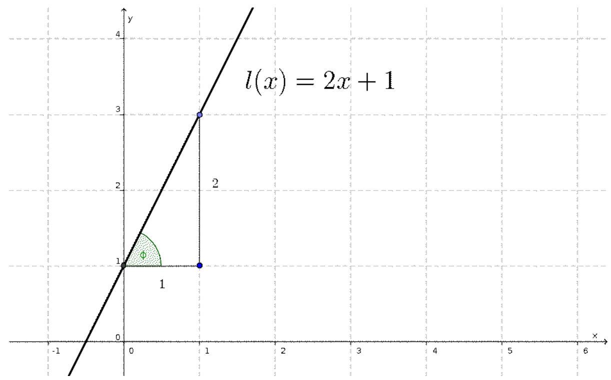
Los coeficientes m y b caracterizan la gráfica de la función lineal. Conociendo el valor de m y de b podemos **reconocer** y **graficar** la recta descripta por la función lineal $l(x) = mx + b$, sin necesidad de una tabla de valores. El siguiente ejemplo sirve para repasar el significado de m y de b.

EJEMPLO 1.2.4.1. Dada la función $y = l(x) = 2x + 1$, podemos completar una tabla de valores de dos puntos

x	$y = l(x)$
0	1
1	3

- Graficando estos dos puntos, trazamos la gráfica como la recta que pasa por ellos (noten que, siendo una recta, dos puntos son suficiente).
- La recta corta al eje y (eje de ordenadas) cuando $x = 0$, en $y = 1$. Por eso se dice que 1 es la ordenada al origen.

- El valor de y se desplaza 2 unidades (verticales) cuando x se desplaza una unidad (horizontal). Por eso se dice que 2 es la pendiente de la recta.
- Según nociones de trigonometría, el ángulo que la recta forma con el eje x tiene tangente 2 (basta dibujar un triángulo rectángulo usando como hipotenusa el segmento de recta entre los puntos $(0,1)$ y $(1,3)$, y como catetos un segmento horizontal de longitud 1 y uno vertical de longitud 2).



Este trabajo se puede repetir con cualquier función lineal $y = l(x) = mx + b$. Reconocerán que $(0,b)$ y $(1, b+m)$ son dos puntos de la recta que grafica a la función.

- Que la recta pase por $(0,b)$ indica que corta al eje de ordenadas con altura b. Por eso b se llama **ordenada al origen**.
- Que también pase por $(1, b+m)$ indica que, cuando x se incrementa en una unidad, y se incrementa m. Por eso m se llama **pendiente de la recta**.

Si la pendiente m es positiva, la recta está inclinada hacia arriba; y cuanto mayor sea m, mayor es su inclinación. En cambio, si la pendiente m es negativa, la recta está inclinada hacia abajo; y cuanto mayor sea el valor absoluto $|m|$, mayor es su inclinación.

- Usando trigonometría, el triángulo rectángulo de vértices $(0,b)$, $(1,b)$ y $(1,b+m)$ permite decir que la recta forma un ángulo con el eje horizontal cuya tangente es m. Si llamamos ϕ a ese ángulo, recuerden que $m = \tan\phi$.

Si encontramos $m = 0$, queda $l(x) = b$. No es una función lineal, sino constante. Su gráfica es una recta horizontal, se dice que es una **recta de pendiente cero**.

Ecuación de la recta

Las gráficas de funciones lineales y constantes, como vimos, son rectas. Conviene mencionar que también se describen las rectas usando ecuaciones en dos incógnitas x e y. Y no debemos confundir **funcione***s* con **ecuaciones**.

La ecuación general de una recta tiene la forma

$$Ax + By + C = 0$$

Si $B \neq 0$,[1] se puede despejar y. Se obtiene una ecuación **explícita** que siempre tiene la forma

$$y = mx + b$$

(es decir, llamamos m y b a los números que aparezcan en los respectivos lugares).

Esta forma explícita $y = mx + b$ nos da el valor de y que corresponde a cada x. Se puede entender como una función, que a cada x le asigna un y. Obviamente la gráfica de la ecuación $y = mx + b$ (en Geometría) y la gráfica de la función $l(x) = mx + b$ (en Análisis Matemático) son el mismo objeto: una recta en el plano. Podemos hablar indistintamente de función lineal y de ecuación de la recta (inclinada), o de función constante

[1] Cuando $B = 0$, se puede despejar $x = -C/A$. En ese caso la recta es vertical.

y de ecuación de la recta horizontal, y aprovechar las técnicas de Geometría que conozcan para reconocer las gráficas de funciones lineales y constantes.

Vamos a utilizar frecuentemente funciones lineales y ecuaciones de rectas, por eso conviene repasar cómo construirlas. Para escribir la ecuación de una recta (no vertical) a partir de información geométrica, basta proponer la forma $y = mx + b$ y encontrar los valores apropiados de m y b. Según los datos disponibles, conviene distinguir dos casos:

- si se conoce que la recta pasa por un punto (x_0, y_0) y se conoce su pendiente m: se sabe que $y_0 = mx_0 + b$, de donde se despeja $b = y_0 - mx_0$. Reemplazando b en la forma $y = mx + b$ y sacando m de factor común, resulta

$$\boxed{y = m(x - x_0) + y_0}$$

Conviene recordar esta forma para reemplazar directamente (x_0, y_0) y m.

- si se conocen dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) que pertenezcan a la recta, con $x_0 \neq x_1$: se sabe que

$$\begin{cases} y_0 = mx_0 + & b \\ y_1 = mx_1 + & b \end{cases}$$

de donde se despejan m y b resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Despejando $m = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)$ y b, y reemplazando, resulta

$$\boxed{y - y_0 = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0)}$$

Conviene recordar esta forma para reemplazar directamente los datos (x_0, y_0) y (x_1, y_1).

Pendiente de la recta y razón de cambio

La característica distintiva de la función lineal $y = l(x) = mx + b$ es que el valor de y varía en forma proporcional al incremento de la variable x. Dados dos valores x_1, x_2 distintos, podemos escribir el desplazamiento en x como $\Delta x = x_2 - x_1$ (como vimos en la sección 1.1.4) y el desplazamiento en y como $\Delta y = l(x_2) - l(x_1) = m(x_2 - x_1)$. La razón entre estos desplazamientos, es decir su cociente, se puede calcular como

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{l(x_2) - l(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

y resulta igual a la pendiente m, para cualesquiera valores de x_1, x_2 elegidos. Geométricamente, esto significa que la gráfica es una recta: la pendiente calculada entre cualquier par de puntos de la gráfica es siempre la misma. Para una función constante la razón entre estos desplazamientos da cero. Se puede decir que una función constante es una recta con pendiente $m = 0$.

Las funciones constantes y lineales que estamos considerando son las únicas funciones cuya razón de cambio no depende de los puntos elegidos. Para cualquier otra función, este cociente depende de los puntos inicial y final considerados.

Actividades

Actividad 1.2.4.1. Dada la función $y = 3x + 5$, completen la tabla de valores

x	y
0	
1	

- Grafiquen los dos puntos, y la recta que pasa por ellos.

- ¿Dónde corta la recta al eje y (eje de ordenadas)?
- ¿Cuánto se desplaza el valor de y cuando x cambia de 0 a 1?
- ¿Cuánto vale la tangente del ángulo que la recta forma con el eje x?

ACTIVIDAD 1.2.4.2. Construyan funciones lineales cuya gráfica

1. pase por $(-2, 3)$ y por $(7, 5)$
2. pase por $(0, 3)$ y forme un ángulo de 30^o con el eje x
3. tenga pendiente $m = -1/3$ y pase por $(1, 5)$

GEOGEBRA 1.2.4.3. Ubiquen en la Vista Gráfica dos puntos de coordenadas $(-2, 3)$ y $(7, 5)$. Tracen una recta con la herramienta "Recta que pasa por Dos Puntos".

Encuentren en la Vista Algebraica la ecuación de la recta creada, y con el botón derecho del mouse elijan que se muestre en forma explícita. Allí verán la función lineal asociada a la recta y podrán compararla con el trabajo de la actividad 1.2.4.2.

1.2.5 Otras funciones básicas

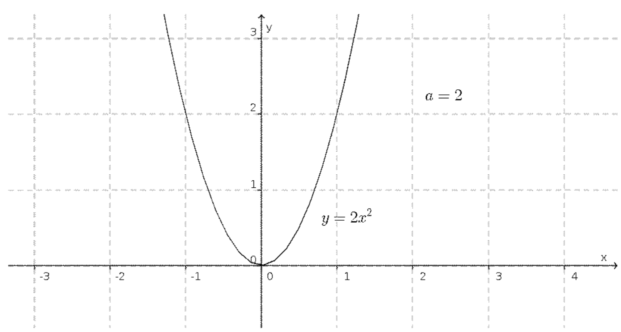
Función cuadrática

Llamamos función cuadrática a cualquiera dada por la fórmula

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

con a, b y c números reales y $a \neq 0$. El dominio es $\mathbb{R}$ y la gráfica es siempre una parábola de eje vertical[2].

Conviene reconocer al golpe de vista el caso más sencillo $y = x^2$, conocido como parábola estándar:



Más adelante discutiremos cómo reconocer la gráfica de una función cuadrática de la forma general $f(x) = ax^2 + bx + c$.

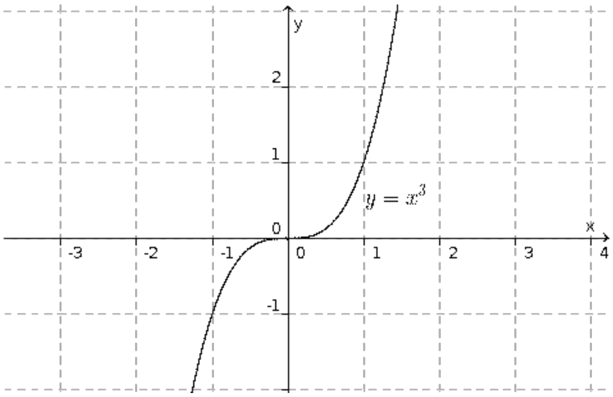
Potencias naturales

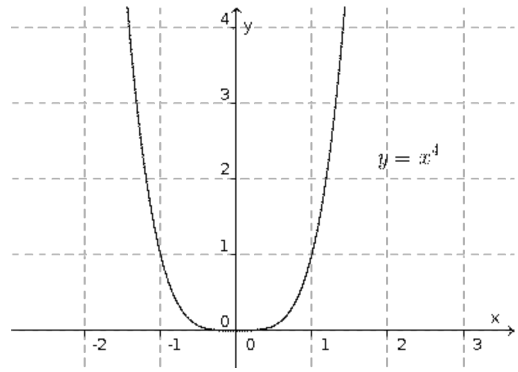
Consideremos funciones de la forma $f(x) = x^n$, donde $n \in \mathbb{N}$ es un exponente natural. Cualitativamente las gráficas adoptan dos formas diferentes, dependiendo de la paridad del exponente n.

- si n es impar, $\mathbf{Im}\, f = \mathbb{R}$. La gráfica muestra una rama izquierda con valores negativos y una rama derecha con valores positivos.
- si n es par, $\mathbf{Im}\, f = [0, +\infty)$. La gráfica muestra dos ramas positivas, simétricas, como en el caso de la parábola estándar ($n = 2$).

Por ejemplo, encontramos con GeoGebra:

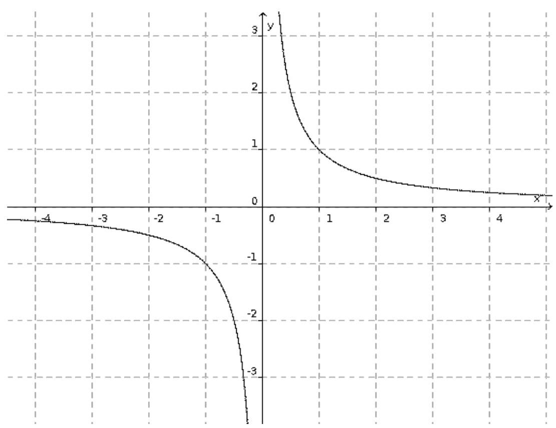
[2] Verán en Algebra la definición geométrica de parábola, su ecuación canónica, sus elementos y simetrías.





Función recíproca $1/x$

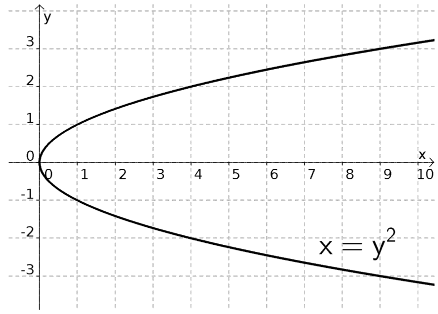
Analicemos la función dada por la fórmula $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Una diferencia con las funciones que vimos hasta ahora es que no está definida para todo x real, ya que para $x = 0$ la operación de división no puede realizarse. Luego, $\mathbf{Dom}\, f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = R - \{0\}$. Una porción significativa de su gráfica es



La curva geométrica correspondiente a esta gráfica es una **hipérbola**[3].

Raíz cuadrada

Consideremos la ecuación en dos variables $x = y^2$. Si interpretamos a x como función de y, podemos graficarla como una parábola en el plano (x, y) :



[3]Verán en Algebra la definición geométrica de hipérbola, su ecuación canónica, sus elementos y simetrías.

Nos preguntamos si esta ecuación $x = y^2$ define a y como función de x. Lo podemos pensar de dos maneras (equivalentes):

1. Dibujando rectas verticales $x = a$ (con $a > 0$) vemos que la recta corta al gráfico en dos puntos. Si dibujamos rectas $x = a$ (con $a < 0$) vemos que la recta no corta al gráfico.
2. Algebraicamente, despejando el cuadrado como raíz cuadrada: $y = \pm\sqrt{x}$. Tenemos dos resultados si $x > 0$, o un resultado si $x = 0$, o ningún resultado real si $x < 0$.

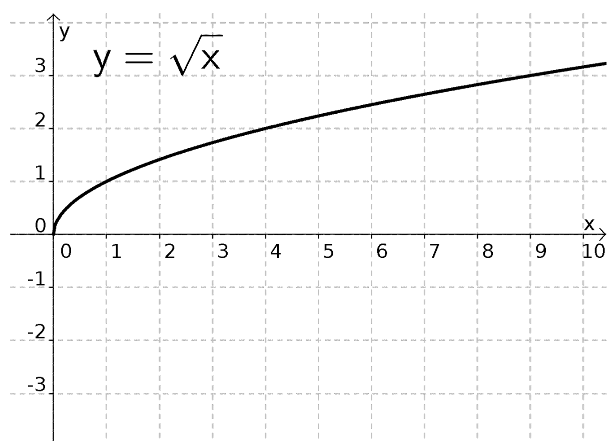
Vemos que no logramos una regla de asignación que a cada valor de x le asigne un y solo un valor de y: la ecuación $x = y^2$ no define a y como función de x. Sin embargo es muy útil trabajar con la raíz cuadrada en forma función. Para eso necesitamos hacer **restricciones**.

Mirando el gráfico, podemos restringir $x \in [0, +\infty)$ y elegir la rama superior de la parábola imponiendo que $y \in [0, +\infty)$. De esta forma para cada $x \geq 0$ permitimos un solo valor de $y \geq 0$ tal que $y^2 = x$. A esta regla para calcular y se la anota

$$y = +\sqrt{x}$$

En la literatura científica se acepta y se usa la siguiente **convención**: la expresión $\sqrt{x}$ hace referencia al valor **positivo**[4] de la raíz cuadrada y define una función

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{} : [0, +\infty) & \to & [0, +\infty) \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & y = +\sqrt{x} \end{array}$$



Observen que para cada x en el dominio $[0, +\infty)$ se puede calcular la raíz cuadrada, y que el codominio excluye los resultados negativos. Es importante notar que las calculadoras también incorporan esta convención; por ejemplo, calculen con calculadora $\sqrt{16}$, ¿cuántas respuestas obtienen?

La misma convención nos permite definir otra función

$$g : [0, +\infty) \to (-\infty, 0]$$

que tome valores en la rama inferior, con regla de asignación

$$y = g(x) = -\sqrt{x}$$

Si graficamos en el mismo plano las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = -\sqrt{x}$, podemos comprobar que cada una de las funciones se corresponde con una de las ramas de la parábola de eje x dada por $x = y^2$.

Observación: analicemos qué ocurre si queremos calcular con esta convención $\sqrt{x^2}$. Por ejemplo, $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$. En general, elevar cualquier número real al cuadrado produce un número positivo, y la convención para la raíz cuadrada nos devuelve un número positivo (aunque comencemos con uno negativo). Por lo tanto,

[4] En rigor, se debe decir "no negativo" porque se incluye $x = 0$.

con esta convención usual **no corresponde simplificar el cuadrado con la raíz cuadrada**. Para expresar este resultado para cualquier x, la forma correcta es:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Raíces de índice n

Recordemos la definición de **raíces n-ésimas**. Dado un número n natural, se dice que

$$y = \sqrt[n]{x} \text{ si y sólo si } y^n = x$$

En palabras, la raíz n-ésima es la operación inversa a la potencia de exponente n.

El caso $n = 2$ es la raíz cuadrada que ya discutimos. Hemos tenido que restringir los valores de x y de y para poder tratarla como función. Lo mismo pasa con los valores **pares** de n.

Por ejemplo, la función $y = \sqrt[4]{x}$, tiene dominio $[0, +\infty)$ y por convención se toma el resultado no negativo.

En cambio, a partir del gráfico de $x = y^3$ pueden discutir y observar que $y = \sqrt[3]{x}$ es una verdadera función con dominio $\mathbb{R}$: para cada x del eje real, $\sqrt[3]{x}$ tiene un y solo un resultado real.

Recordemos también que las raíces n-ésimas se pueden anotar como potencias de exponente fraccionario:

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

Esta notación es muy conveniente para operar, porque los exponentes fraccionarios cumplen las mismas propiedades que los exponentes naturales. Sin embargo, si se olvidaran de cuidar si n es par o impar, pueden cometer errores cuando $x < 0$. Les recomendamos usar la notación de exponente fraccionario solamente para base positiva. Y ser muy cuidadosos con las cantidades negativas cuando trabajen las raíces de índice par.

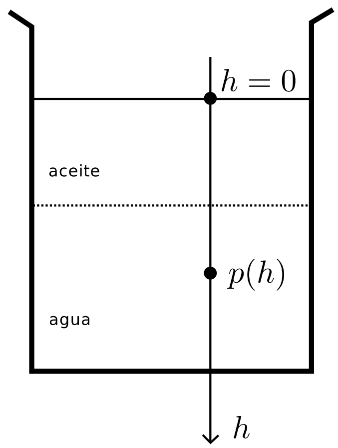
Actividades

GeoGebra 1.2.5.1. Grafiquen con GeoGebra las funciones presentadas en esta sección. Comparen las gráficas con lo que les hemos contado.

1.2.6 Funciones definidas a trozos

En algunas ocasiones, la expresión matemática de una función tiene distinto aspecto en diferentes regiones del dominio. Es posible hablar de **una sola función**, usando fórmulas distintas en cada región.

> Ejemplo 1.2.6.1. La presión hidrostática en un fluido en reposo depende de la profundidad, medida desde la superficie. En el caso de un recipiente con líquidos no miscibles, como aceite y agua, se forman capas con cada fluido. La presión aumenta en forma proporcional a la profundidad mientras se desciende por un fluido, pero aumenta con distinto ritmo al penetrar el otro fluido.
> Consideremos un recipiente con una capa de 10 cm de aceite, flotando sobre 20 cm de agua.



La profundidad se denota con h (medida en cm); usemos una regla tal que h vale 0 en la superficie, $0 < h < 10$ en la capa de aceite y $10 < h < 30$ en la capa de agua. La presión p (medida en unidades apropiadas) que siente un sensor sumergido a una profundidad h se describe con una función con $p(h)$.

La fórmula que asigna el valor de presión a cada profundidad es

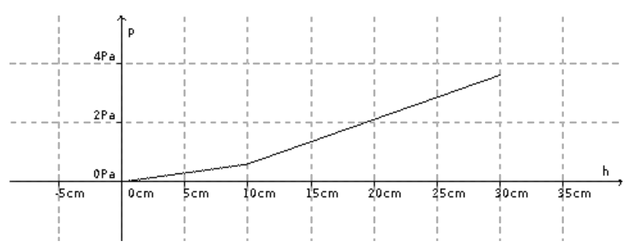
mientras se mida en aceite, es decir $0 \leq h \leq 10, \quad p(h) = 0.08h$

pero

mientras se mida en agua, es decir $10 < h \leq 30, \quad p(h) = 0.8 + 0.15(h - 10)$

Noten que $p(h)$ es una única función, describiendo un único valor de presión para cada profundidad. Por las características de la situación, resulta necesario utilizar expresiones matemáticas distintas en distintas regiones del dominio.

Podemos graficar esta función, aprovechando que las dos fórmulas son lineales, con distinta pendiente: la gráfica de la presión en función de la profundidad se compone de dos tramos rectos. Sigue una recta de pendiente 0.08 mientras h está entre 0 y 10, pero sigue otra recta de pendiente 0.15 cuando h está entre 10 y 30:



En la gráfica volvemos a ver que estamos describiendo **una sola función** $p(h)$, que se calcula con distinta fórmula según el intervalo en que se considere h.

El dominio de esta función es el intervalo $[0, 30]$: no hemos dado una receta para calcular la presión encima del líquido, ni más allá del fondo del recipiente.

En casos como el ejemplo anterior, se dice que la función está **definida a trozos**. La forma compacta de anotar estas funciones usa una llave y dos o más renglones:

$$p(h) = \begin{cases} 0.08h & \text{si } 0 \leq h \leq 10 \\ 0.8 + 0.15(h - 10) & \text{si } 10 < h \leq 30 \end{cases}$$

La forma correcta de evaluar estas funciones para un valor de su variable independiente es:

1. primero separar el dominio de la función en los intervalos indicados en cada renglón.
2. luego determinar en qué región del dominio cae el valor de la variable, y elegir el renglón apropiado.

3. evaluar la fórmula dada en dicho renglón.

En el ejemplo, el dominio está formado por los intervalos $[0,10]$ y $(10,30]$.

- dado $h = 5$, en el primer intervalo, se debe usar el primer renglón y evaluar $p(5) = (0.08)5 = 0.4$
- dado $h = 10$, borde cerrado del primer intervalo, se debe usar el primer renglón y evaluar $p(10) = (0.08)10 = 0.8$
- dado $h = 20$, en el segundo intervalo, se debe usar el segundo renglón y evaluar $p(20) = 0.8+0.15(20-10) = 2.3$

Al graficar, se recomienda usar un punto lleno $\bullet$ cada vez que una región tenga un borde cerrado y un punto vacío $\circ$ cada vez que una región tenga un borde abierto.

Función valor absoluto

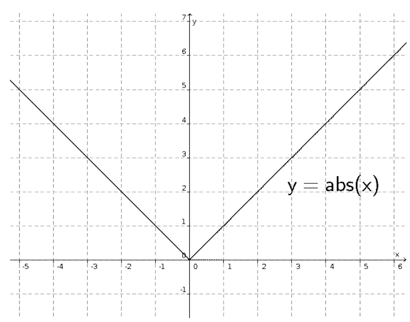
Un ejemplo importante de función definida a trozos es la **función valor absoluto**, que a cada x real le asigna su valor absoluto (es decir, su distancia al origen). Resulta una función definida a trozos, ya que la operación trata en forma distinta a los números positivos y a los negativos. Es tan importante en las aplicaciones que tiene nombre propio y notación propia. Está definida como

$$abs : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

dada por

$$abs(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Su gráfica está compuesta por segmentos de recta: muestra una región de pendiente $m = 1$ y otra de pendiente $m = -1$:



Es usual anotar a la operación valor absoluto como $|x|$. La notación $abs(x)$ se usa en los programas de computación; en el trabajo manual, la notación $abs(\ )$ puede ayudar a trabajarla como función.Actividade

Actividades

GeoGebra 1.2.6.1. Podemos usar GeoGebra para graficar funciones definidas a trozos. Para eso se usan *condiciones*. La forma esquemática de escribirlas es

```
Si[condición, expresión si se cumple, expresión si no se cumple]
```

Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2-x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

se construye escribiendo en la entrada

```
f(x)=Si[x<=1, x-1, 2-x^2]
```

Noten que el programa no indica gráficamente si los extremos de cada región son abiertos o cerrados.

1.3 Operaciones entre funciones

Contenidos de esta sección: suma, resta, producto y cociente de funciones. Composición de funciones. Interpretación geométrica de algunas operaciones entre funciones.

Las funciones que aparecen en la práctica suelen ser bastante más elaboradas que las que trabajamos en la sección 1.2. Sin embargo, la mayoría se construye mediante cinco operaciones entre unas pocas funciones básicas. En primer lugar trabajaremos con cuatro operaciones algebraicas entre funciones: suma, resta, producto y cociente. En segundo lugar, presentaremos la composición de funciones. Finalmente, como aplicación, discutiremos la interpretación geométrica de algunas composiciones de funciones.

1.3.1 Operaciones algebraicas entre funciones

A partir de funciones conocidas, digamos f y g, vamos a construir nuevas funciones, combinándolas de acuerdo a las operaciones algebraicas entre números reales: la suma, la resta, la multiplicación y el cociente.

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, siempre tiene sentido sumar, restar o multiplicar sus resultados para los valores de x donde ambas se puedan calcular:

Dadas dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$, se llama:

- **suma de f y g**
  - *a la función $(f+g) : A \cap B \to \mathbb{R}$, dada por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$*
- **resta de f y g**
  - *a la función $(f-g) : A \cap B \to \mathbb{R}$, dada por $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$*
- **multiplicación de f y g**
  - *a la función (fg): $A \cap B \to \mathbb{R}$, dada por $(fg)(x) = f(x)g(x)$*

Observen que llamamos $f+g$ a una función nueva con un dominio nuevo que es la **intersección $\mathbf{Dom}\, f \cap \mathbf{Dom}\, g$**; la regla de asignación de $f+g$ asigna a cada x la suma $f(x)+g(x)$. Lo mismo pasa con la resta y la multiplicación.

Ejemplo 1.3.1.1. Si $f(x) = x^2+1$ y $g(x) = x^2-4$, definidas en $\mathbb{R}$, obtenemos

- $(f+g)(x) = (x^2+1) + (x^2-4) = 2x^2-3$ $\quad$ $\mathbf{Dom}(f+g) = \mathbb{R}$, ya que $\mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.
- $(fg)(x) = (x^2+1)(x^2-4) = x^4-3x^2-4$ $\quad$ $\mathbf{Dom}(fg) = \mathbb{R}$

El cociente de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, en cambio, se puede hacer cuando ambas están definidas y además el denominador toma valores distintos de cero (en caso contrario, no se podría dividir).

Dadas dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ se llama:

- **cociente de f y g**
  - *a la función $\left(\dfrac{f}{g}\right) : C \to \mathbb{R}$, dada por $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$,*

donde $C = A \cap B - \{x : g(x) = 0\}$ es la intersección de los dominios, excluyendo a los puntos donde se anule el denominador.

Noten que el dominio C es el conjunto más amplio de valores de x donde la división $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ se puede realizar.

Ejemplo 1.3.1.2. Si $f(x) = x^2+1$ y $g(x) = x^2-4$, definidas en $\mathbb{R}$, obtenemos

- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ $\quad$ $\mathbf{Dom}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 2\}$, ya que $\mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$ pero $g(x) = x^2-4 = 0$ cuando $x = 2$ y cuando $x = -2$.

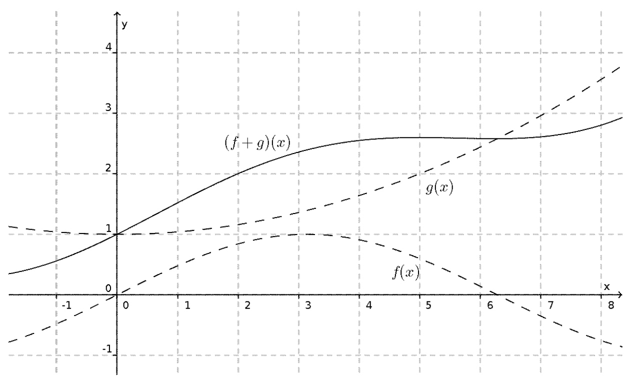
Observación: para resolver la condición $x^2 - 4 = 0$ despejamos $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$; consideramos las dos soluciones porque interesan *todos* los valores que hagan $x^2 - 4 = 0$. No debe confundirse la búsqueda de soluciones de una ecuación cuadrática con la convención de elegir *un* valor para la función raíz cuadrada.

Por otro lado, podemos calcular

- $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+1}$ $\qquad$ $\mathbf{Dom}\left(\dfrac{g}{f}\right) = \mathbb{R}$, ya que $\mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$ y $f(x) = x^2 + 1 \neq 0$ para todo x real.

Interpretación gráfica de la suma y resta de funciones

La suma de dos funciones conocidas se puede interpretar como la suma de números en el eje de ordenadas. Recordemos que la suma de dos números a y b se interpreta en la recta numérica dibujando un punto a y desplazándolo b unidades (o bien dibujando el punto b y desplazándolo a unidades, porque la suma es conmutativa). Cuando sumamos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ hacemos lo mismo: dibujamos la gráfica de $f(x)$ y la desplazamos en sentido vertical, en la cantidad indicada por el valor de $g(x)$. La novedad es que este desplazamiento vertical varía según el valor de x, por lo que se dice que la suma se hace "punto a punto". En el siguiente gráfico, construido con GeoGebra, podemos ver en trazo punteado las gráficas de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ y en trazo continuo la gráfica de la suma $(f+g)(x)$; en cierto sentido, se trata de montar una gráfica sobre la otra:



La resta de funciones $(f-g)(x)$ se interpreta de manera similar, graficando primero $f(x)$ y desplazando los puntos en la cantidad indicada por el valor de $-g(x)$. El producto y el cociente de funciones no admiten una interpretación gráfica sencilla.

Actividades

Actividad 1.3.1.1. Escriban la siguiente resta de funciones como un cociente:
$f(x) = \frac{x-1}{x+2} - \frac{3x}{x-1}$
Indiquen la función que encuentran como numerador y la que encuentran como denominador.

Actividad 1.3.1.2. Construyan la gráfica de $f+g$ a partir de las siguientes funciones, cuyas gráficas ya son conocidas:

1. $f(x) = x^2,\ g(x) = 2$
2. $f(x) = x^2,\ g(x) = -3$
3. $f(x) = 2x+1,\ g(x) = 1$

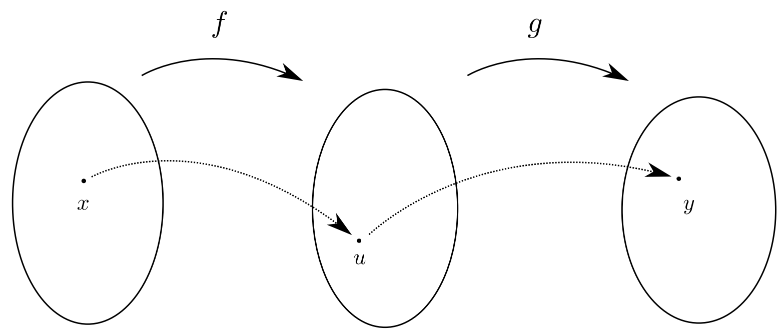
¿Pueden describir gráficamente el efecto de sumar una función constante? ¿Pueden describir el efecto de sumar una función constante negativa?

1.3.2 Composición de funciones

En muchas situaciones de interés, la relación entre dos magnitudes se da a través de una variable intermedia. Por ejemplo, una cantidad y depende de una variable u, pero a su vez el valor de u depende de otra variable x. Indirectamente, vemos que y depende de x.

Este mecanismo define una operación importante entre funciones, llamada **composición**. Para interpretarla, conviene pensar a cada función como un dispositivo que toma un número de entrada (la variable independiente) y produce un número de salida (la variable dependiente). La composición es la aplicación sucesiva de dos de estos dispositivos: a partir de dos funciones f y g, tomamos un número x y aplicando la función f generamos un primer resultado u; luego a este resultado u le aplicamos la función g y obtenemos el resultado final y.

En un esquema de conjuntos y flechas podemos dibujar



La **composición de** f **con** g **es una nueva función** que expresa la relación resultante entre x e y. Noten que para describir la composición necesitamos introducir una variable intermedia que hemos llamado u. En nuestro esquema, u funciona como variable dependiente de la función f,

$$u = f(x)$$

y a su vez como variable independiente de la función g,

$$y = g(u)$$

Para anotar la relación indirecta entre x e y resulta apropiada la notación

$$y = g(f(x))$$

que se puede leer "y se calcula como g de f de x" expresando que el resultado de $f(x)$ es la variable de la función g.

Para que el cálculo $g(f(x))$ tenga sentido, deben verificarse dos condiciones naturales:

- que x pertenezca al dominio de f, para que $f(x)$ tenga sentido,
- y que el resultado $f(x)$ pertenezca al dominio de g, para que $g(f(x))$ tenga sentido.

En consecuencia el **dominio de la función compuesta** $g(f(x))$ es un **subconjunto del dominio de** f**, tal que su imagen esté incluida en el dominio de** g.

Todo lo anterior se formaliza en la siguiente definición:

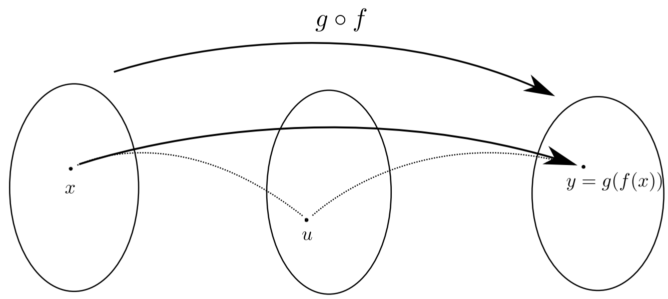
Dadas dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$, se llama **composición** *de f con g, que se anota $g \circ f$ y se lee* "f compuesta con g"*, a la función*

$$g \circ f \, : D \to \mathbb{R}$$

con dominio $D = \{x : \, x \in A \text{ y } f(x) \in B\}$, y regla de asignación

$$(g \circ f) \, (x) = g\,(f(x))$$

La función $g \circ f$ se muestra en el esquema gráfico como la flecha que va directamente desde x hasta $y = g(f(x))$:



EJEMPLO 1.3.2.1. Consideren dos funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 1/x$, cada una con su dominio natural: $\mathbf{Dom}\, f = \mathbb{R}$ y $\mathbf{Dom}\, g = \mathbb{R} - \{0\}$. Podemos hacer dos composiciones distintas:

- Para construir $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ conviene llamar primero $u = g(x) = 1/x$, y luego calcular $f(u) = u^2 - 1$. Reemplazando $u = 1/x$ encontramos
$$f(g(x)) = f(u) = u^2 - 1 = (\frac{1}{x})^2 - 1 = \frac{1 - x^2}{x^2}$$
El dominio de esta composición se construye como $\mathbf{Dom}\, g = \mathbb{R} - \{0\}$ para poder calcular $1/x$, sin eliminar ningún otro elemento porque f admite cualquier argumento real. Resulta $\mathbf{Dom}\ (f \circ g) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Para construir $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ conviene llamar $u = f(x) = x^2 - 1$, y luego calcular $g(u) = 1/u$. Reemplazando $u = x^2 - 1$ encontramos
$$g(f(x)) = g(u) = \frac{1}{u} = \frac{1}{x^2 - 1}$$
El dominio de esta composición se construye como $\mathbf{Dom}\, f = \mathbb{R}$, ya que $f(x)$ se puede calcular siempre, pero se deben eliminar los valores de x tales que $u = x^2 - 1 = 0$, para poder calcular $g(u)$. Así resulta $\mathbf{Dom}\ (g \circ f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

En cada caso hemos usado la letra u como variable auxiliar, esta letra no debe aparecer en la expresión final de la función compuesta. Si en la lectura resulta confuso usar la misma letra u para reemplazos distintos, recomendamos usar otras letras (v, w, etc.).

Se puede ver a partir del ejemplo anterior que en general $f \circ g \neq g \circ f$, es decir, **la composición no es conmutativa**.

Cuando trabajemos con funciones más elaboradas, será importante reconocer si están construidas como composición de funciones más sencillas.

EJEMPLO 1.3.2.2. La función
$$y = h(x) = \sqrt{1 - x^2}$$
se puede reconocer como una composición de dos funciones más sencillas: se trata de la raíz cuadrada de otra función. Si llamamos $u = f(x) = 1 - x^2$ y llamamos $y = g(u) = \sqrt{u}$, vemos que
$$h(x) = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{u} = g(u) = g(f(x))$$
En este contexto se llama *argumento de* g a la expresión matemática que se usa como variable independiente de g: al calcular $\sqrt{1 - x^2}$ se dice que el argumento de la raíz cuadrada es $1 - x^2$. Coloquialmente, para no enredarse con la notación, al calcular $\sqrt{1 - x^2}$ se suele decir que $f(x) = 1 - x^2$ es la "función de adentro" y que $g(u) = \sqrt{u}$ es la "función de afuera".

En esta descomposición, la función $f(x) = 1 - x^2$ tiene como dominio natural al conjunto de todos los reales, mientras la función $g(u) = \sqrt{u}$ tiene como dominio natural al intervalo $[0, +\infty)$. La composición $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ tiene como dominio a todos los reales x tales que $u = f(x) = 1 - x^2 \geq 0$, para que se pueda calcular la raíz cuadrada indicada por $g(u)$. Resolviendo la condición $1 - x^2 \geq 0$ encontramos el dominio de $h(x)$, que resulta ser el intervalo$[-1, 1]$.

Actividades

ACTIVIDAD 1.3.2.1. En la siguiente tabla de composiciones falta información. Encuentren las funciones faltantes, indicando además el dominio de la composición.

f	g	$g \circ f$	dominio de $g \circ f$
$x - 1$		$1/(x-1)$	
	$\sqrt[4]{x}$	$\sqrt[4]{x^2 - 1}$	
$\dfrac{x-1}{x+2}$	$x + \dfrac{1}{x}$		
$x + \dfrac{1}{x} + 1$		$2x + \dfrac{2}{x}$	

GEOGEBRA 1.3.2.2. Con GeoGebra se pueden hacer composiciones. Si $f(x)$ y $g(x)$ ya están definidas, pueden escribir simplemente

```
h(x)=g(f(x))
```

para construir la función $g \circ f$. En la Vista Algebraica verán la composición resuelta.

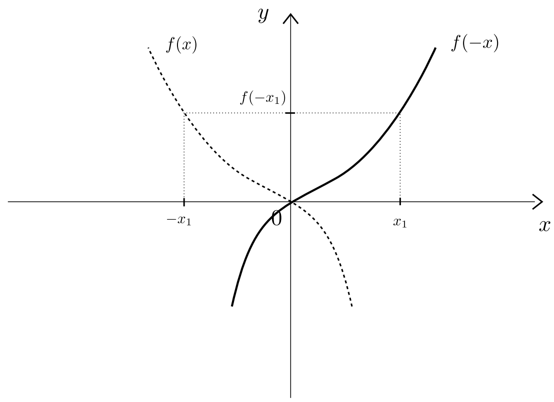
1.3.3 Transformaciones geométricas de gráficas

Algunas operaciones de suma, producto y composición permiten generar transformaciones geométricas de la gráfica de una función $f(x)$. Más precisamente, podemos construir funciones nuevas, cuyas gráficas son copias transformadas de la gráfica de f. Con las mismas ideas, podremos descubrir si la gráfica de una función elaborada resulta ser cierta transformación de una función conocida.

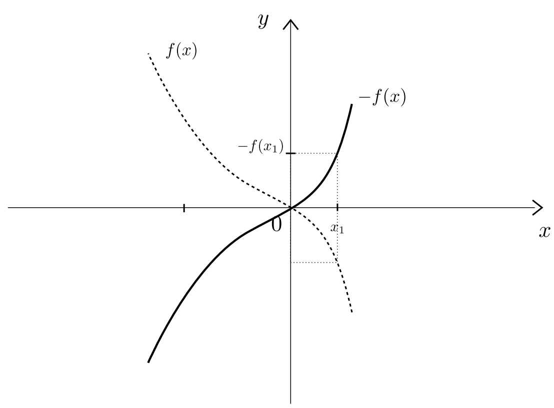
En esta sección discutimos brevemente reflexiones, traslaciones y escaleos de la gráfica de una función $y = f(x)$.

Reflexiones respecto de los ejes

Dada una función conocida $y = f(x)$, consideremos la función compuesta $g(x) = f(-x)$. Dado un valor de x, notemos que primero se calcula su opuesto $-x$, luego se evalúa f en el punto $-x$ y finalmente se le asigna este resultado a una nueva función g. Gráficamente vemos que la gráfica se copia, como por un espejo, reflejada con respecto al eje y. Por esta razón, la función construida como $g(x) = f(-x)$ se llama **reflexión** de $f(x)$ con respecto al eje y.



Consideremos ahora la función compuesta $h(x) = -f(x)$. Dado un valor de x, notemos que primero se evalúa f en ese punto, luego se calcula el opuesto del resultado, y se le asigna este nuevo resultado a la función h. Gráficamente vemos que la gráfica se copia, como por un espejo, reflejada con respecto al eje x. Por esta razón, la función construida como $h(x) = -f(x)$ se llama **reflexión** de $f(x)$ con respecto al eje x.

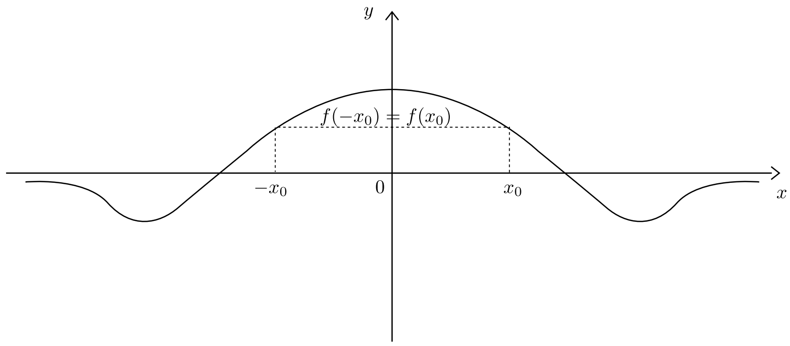


Paridad y simetría

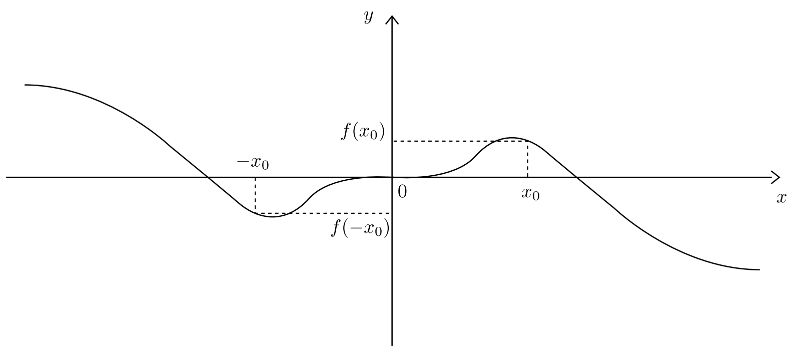
A la hora de graficar una función f definida por una fórmula $y = f(x)$, resulta práctico buscar simetrías de reflexión. Si descubrimos que una parte de la gráfica es el reflejo de otra parte de la gráfica, bastará graficar primero una parte y luego copiar adecuadamente el resto de la gráfica

Mencionamos dos casos importantes de simetría de reflexión, basados en comparar el dibujo en el semiplano derecho ($x > 0$) con el del semiplano izquierdo ($x < 0$). En la práctica, se trata de ver si el dominio es simétrico ante reflexión (es decir, si para cada x del dominio su opuesto $-x$ también está en el dominio) y de comparar el valor de la función en cada punto x con el valor de la función en el punto opuesto $-x$.

- si el dominio de $f(x)$ es simétrico ante reflexión y para cada x se verifica que $f(-x) = f(x)$, la gráfica es simétrica por reflexión en el eje vertical. Es decir, la reflexión de la gráfica respecto del eje y coincide con sí misma. En estos casos se dice que la función es **par**.



- si el dominio de $f(x)$ es simétrico ante reflexión y para cada x se verifica que $f(-x) = -f(x)$, se dice que la función es **impar**. En este caso la reflexión de la gráfica respecto del eje y, seguida por una reflexión respecto del eje x, coincide con sí misma. Gráficamente, la altura del gráfico en cada x y en su opuesto $-x$ es la misma pero cambiada de signo. La parte del semieje negativo se puede obtener rotando 180^0 la parte del semieje positivo.



EJEMPLO 1.3.3.1.

- Consideremos la función $f(x) = x^2$. Su dominio es todo el eje real, que es simétrico ante reflexión. Para comparar $f(x)$ con $f(-x)$ tomamos un x genérico, calculamos
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$
y concluimos que $f(-x) = f(x)$. Luego, la función es par. Dibujen su gráfica para observar geométricamente esta simetría.
- Veamos ahora la función $f(x) = 2x$. Su dominio es todo el eje real, que es simétrico ante reflexión. Para comparar $f(x)$ con $f(-x)$ calculamos
$$f(-x) = 2(-x) = -2x = -(2x)$$
y concluimos que $f(-x) = -f(x)$. Luego, la función es impar. Dibujen su gráfica para observar geométricamente esta simetría.
- Por último, analicemos $f(x) = 2x + 3$. Su dominio es nuevamente todo el eje real. Si calculamos
$$f(-x) = 2(-x) + 3 = -2x + 3$$
encontramos que $f(x)$ no coincide con $f(-x)$ ni con $-f(-x)$. Esta función no es par ni impar. Grafiquen para comprobar que no se observan simetrías de reflexión.

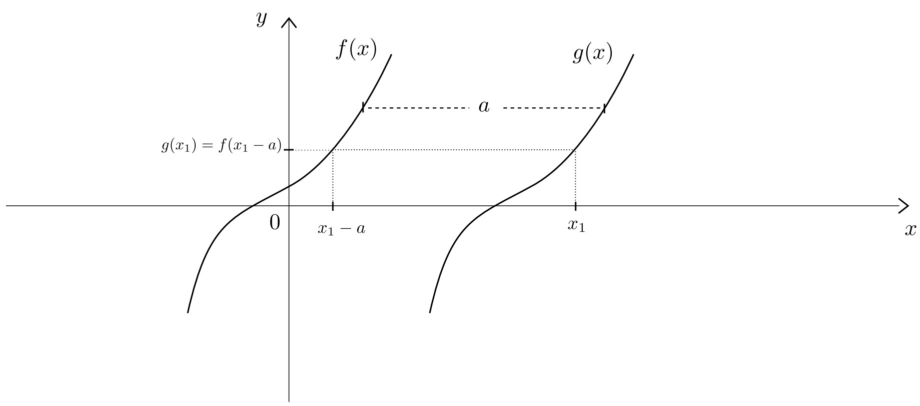
Traslaciones en el plano

Supongamos que tenemos que dibujar en una hoja cuadriculada la gráfica de una función que es como la de $y = x^2$, pero desplazada dos unidades a la derecha y 5 unidades hacia abajo. Bastaría recordar la parábola dada por $y = x^2$, contar cuadraditos para ubicar el vértice desplazado, y dibujar la gráfica deseada. Podemos hacer lo mismo con la fórmula de cualquier función.

- Si conocemos la gráfica de una función $f(x)$ podemos construir una nueva función $g(x)$ cuya gráfica sea como la de $f(x)$, pero trasladada horizontalmente a unidades mediante la composición

  $$g(x) = f(x - a)$$

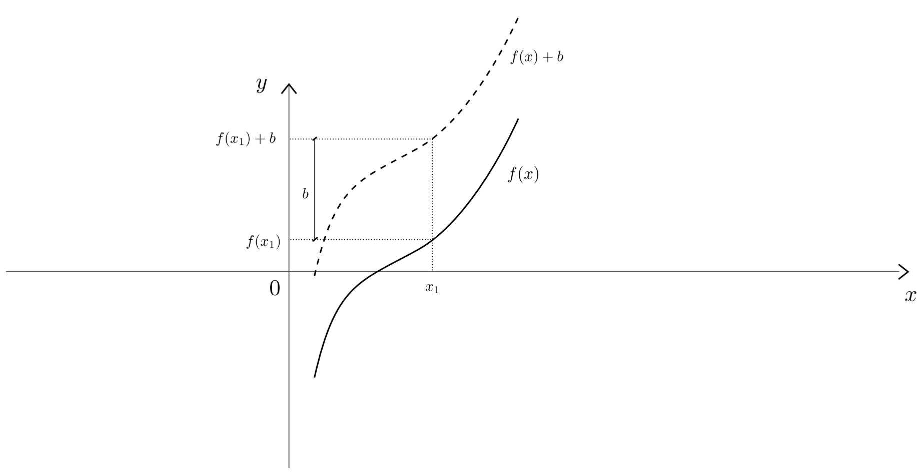
  donde a es un número real. Esta receta funciona por lo siguiente (para fijar ideas, pensemos que a es positivo): dado un valor de x, primero calculamos $x - a$, que es un punto del eje horizontal desplazado a la izquierda; luego calculamos f en ese punto $x - a$, y por último asignamos el resultado a $g(x)$. Entonces, para graficar $y = g(x)$, dibujamos el valor de $f(x-a)$ encima del punto x: la gráfica de $g(x)$ aparece trasladada horizontalmente en a unidades a la derecha.



- Si conocemos la gráfica de una función $f(x)$ podemos construir una nueva función $h(x)$ cuya gráfica sea como la de $f(x)$, pero trasladada verticalmente b unidades mediante la suma

  $$h(x) = f(x) + b$$

  donde b es un número real. Para cada $x \in \mathbf{Dom}\, f$, se calcula $f(x)$ y se le suma b. En consecuencia, la gráfica de $h(x)$ aparece desplazada verticalmente b unidades a lo largo del eje y.



Dilataciones y compresiones

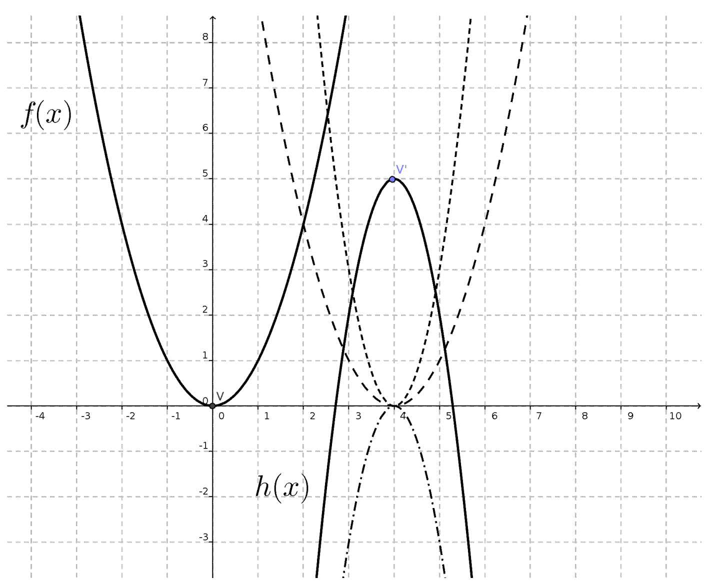
Otra forma de generar gráficas nuevas es dilatando (o comprimiendo) la gráfica de una función conocida $f(x)$, tanto en forma vertical como en forma horizontal. Estas transformaciones se conocen como escaleos, o cambios de escala.

- Cambio de escala vertical: si multiplicamos el valor de $f(x)$ por un número $c > 0$, para todo x del dominio, obtenemos la función
$$y = cf(x)$$
Cuando $c > 1$ la gráfica de $cf(x)$ es como la de $y = f(x)$ pero extendida verticalmente, porque cada $f(x)$ está multiplicado por la misma constante $c > 1$. Del mismo modo, cuando $0 < c < 1$ la gráfica se comprime verticalmente. Se conocen con el nombre de **dilatación o compresión vertical**, respectivamente.
- Cambio de escala horizontal: si utilizamos un número $c > 0$ para realizar la composición
$$y = f(x/c)$$
generamos una transformación en el eje horizontal. Cuando $c > 1$, la función compuesta $y = f(x/c)$ se representa con la gráfica dilatada horizontalmente en un factor c, porque en el punto x se dibuja el valor de f calculado en el punto comprimido x/c. En cambio, cuando $0 < c < 1$ la gráfica se contrae horizontalmente. Se denominan **compresiones o dilataciones horizontale**s, respectivamente.

Ejemplo 1.3.3.2. Consideremos la función $f(x) = x^2$, cuya gráfica es la parábola estándar bien conocida, y apliquemos algunas transformaciones:

- $g(x) = f(x-4) = (x-4)^2$ se grafica como la parábola estándar, trasladada 4 unidades a la derecha.
- $r(x) = 3g(x) = 3\,(x-4)^2$ se grafica como la parábola $g(x)$, ahora dilatada verticalmente por un factor 3.
- $s(x) = -r(x) = -3\,(x-4)^2$ se grafica como la parábola $r(x)$, pero reflejada respecto el eje x.
- $h(x) = s(x) + 5 = -3\,(x-4)^2 + 5$ se grafica como la parábola $s(x)$, trasladada 5 unidades hacia arriba.

En un gráfico mostramos en línea llena la parábola estándar y la parábola transformada $h(x)$, y en líneas punteadas las transformaciones intermedias:



Gráfica general de la función cuadrática

El ejemplo 1.3.3.2 muestra que la gráfica de la función $h(x)$ es una parábola dilatada verticalmente tres veces con respecto a la parábola estándar, con las ramas hacia abajo y el vértice en el punto $(4,5)$. Noten además que $h(x)$ podría aparecer en forma desarrollada como la función cuadrática $h(x) = -3x^2 + 24x - 43$.

En general, cualquier función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$) se puede interpretar como traslaciones, escaleos y/o reflexiones de la parábola $y = x^2$. Para esto es necesario reescribirla **completando cuadrados**:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

A partir de esta forma, trabajando como en el ejemplo 1.3.3.2, se pueden reconocer las transformaciones efectuadas sobre la parábola estándar. En la práctica, no recomendamos memorizar el desarrollo anterior. Es conveniente adquirir la habilidad de completar cuadrados con coeficientes numéricos y repetirlo en cada ejercicio.

Actividades

ACTIVIDAD 1.3.3.1. Completando cuadrados, reconozcan la gráfica de la parábola de ecuación $y = -2x^2 + 6x - 4$. Ubiquen su vértice y la orientación de sus ramas.

GEOGEBRA 1.3.3.2. Reproduzcan las parábolas del ejemplo 1.3.3.2 usando composiciones.

1.4 Funciones especiales

Contenidos de esta sección: exponencial natural. Logaritmo natural. Funciones exponenciales y logarítmicas en diferentes bases. Funciones hiperbólicas.
Trigonometría de triángulos rectángulos. Medida de ángulos en radianes. Circunferencia trigonométrica. Funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente.

En esta sección introducimos algunas funciones especiales, cuya regla de asignación no consiste en cálculos algebraicos. Hemos elegido las que aparecen en materias introductorias de ciencias exactas y naturales, ya que las usarán pronto en sus carreras: exponenciales, logaritmos y funciones trigonométricas, y en menor medida funciones hiperbólicas. Como testimonio de su importancia las van a encontrar en el teclado de sus calculadoras con un tamaño de tecla apenas menor que el "+" o el "x".

Uno de los objetivos de nuestro curso es que se familiaricen con estas funciones. Paulatinamente irán apareciendo en ejemplos y actividades, para que no las olviden. Por eso recomendamos una primer lectura rápida de esta sección, para volver a consultarla cada vez que sea necesario.

1.4.1 Operaciones exponenciales y función exponencial natural (e^x)

La exponencial como operación

Hablamos de expresiones exponenciales cuando aparece un exponente:

> Según lo que hayan estudiado anteriormente,
> - ¿qué significa 4^2?
> - ¿qué significa 4^{-2}?
> - ¿qué significa $4^{1/2}$?
> - ¿qué significa $4^{\sqrt{2}}$?

Darle sentido preciso a la expresión b^x, cuando la base b es positiva y x es cualquier número real, es una tarea muy delicada. En realidad, la podrán apreciar después de haber hecho este curso completo. Sin embargo, las funciones exponenciales son de uso cotidiano en ciencias. Las vamos a trabajar desde ahora, en forma de recetas, y comentaremos la definición formal hacia el final del curso. Aceptemos que

Dado un número $b > 0$, existe una operación exponencial de base b, que para cada número real x permite calcular b^x.

Esta operación incluye el cálculo de potencias naturales (por ejemplo b^2 coincide con el producto $b \cdot b$), de potencias enteras negativas (b^{-1} coincide con $1/b$) y también de raíces n-ésimas ($b^{1/n}$ coincide con el valor positivo de $\sqrt[n]{b}$). Para exponentes irracionales genera resultados nuevos que interpolan suavemente los de potencias enteras y racionales.

Técnicamente, la definición formal de esta operación resulta más sencilla para un valor especial de la base: el número irracional e, conocido como número de Euler. Su valor aproximado es $e \approx 2.71828182846...$ Por este motivo, la operación e^x se llama **exponencial natural**.

En este curso vamos a describir en detalle las propiedades de e^x, y a partir de ellas presentar la función **logaritmo natural**. Las demás exponenciales y logaritmos en base $b > 0$ se pueden expresar en términos de exponenciales y logaritmos naturales.

La exponencial natural como función

La función exponencial más fundamental es la de base e. Aceptamos que:

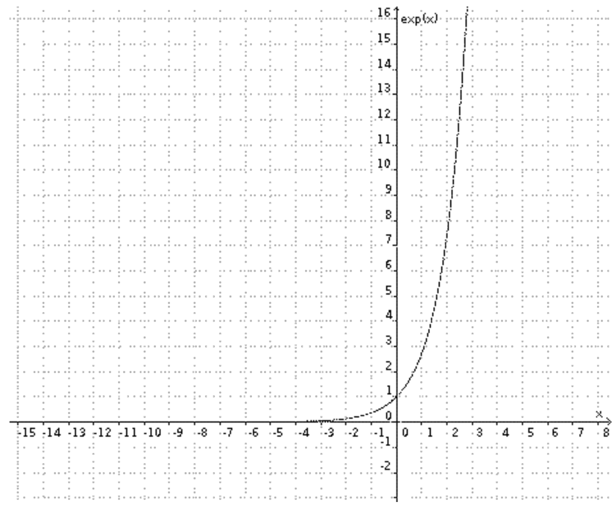
Existe la función **exponencial natural**

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$$

con regla de asignación

$$\exp(x) = e^x$$

Sus valores se pueden leer del gráfico



y se pueden obtener con la calculadora y programas de cálculo.

Observen que esta función tiene notación propia: en lugar de cualquier letra f se usa $\exp$. Su cálculo, para exponentes irracionales, involucra operaciones no algebraicas; por eso se dice que es una función trascendente. Hace algunas decenas de años se buscaba su valor en libros de tablas. Ahora se la encuentra en las calculadoras y en los lenguajes de computación con varios decimales de precisión.

La función $\exp(x)$ se puede entender como una generalización de las potencias racionales de base e. El cálculo con exponenciales naturales tiene, para cualquier exponente, las mismas propiedades que el cálculo de potencias enteras:

La función exponencial natural verifica:

- $\exp(0) = e^0 = 1$
- $\exp(1) = e^1 = e$
- si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\exp(n) = e^n = \underbrace{e.e.\cdots.e}$ multiplicado n veces
- $\exp(-1) = e^{-1} = 1/e$
- si $m \in \mathbb{N}$, entonces $\exp(-m) = e^{-m} = 1/(\underbrace{e.e.\cdots.e})$ multiplicado m veces
- si $p, q \in \mathbb{N}$, con $q \neq 0$, entonces $\exp(p/q) = e^{p/q} = \sqrt[q]{e^p}$

En palabras, la función exponencial natural $\exp(x)$ coincide con las potencias e^x siempre que x sea racional.

La función $\exp(x)$ tiene definido un resultado para *cualquier* x real. Observamos en el gráfico que los valores de e^x, para x irracional, completan una curva suave junto con las potencias racionales de e.

Todo esto permite **operar con e^x como si fuera una potencia**. Se verifican las siguientes propiedades:

Para todo argumento real, la función exponencial natural verifica:

- $\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b)$ que conviene recordar como $e^a e^b = e^{a+b}$
- $\exp(-a) = 1/\exp(a)$ que conviene recordar como $e^{-a} = 1/e^a$
- $\exp(a)/\exp(b) = \exp(a-b)$ que conviene recordar como $e^a/e^b = e^{a-b}$

- $(\exp(a))^b = \exp(ab)$ que conviene recordar como $(e^a)^b = e^{ab}$

Actividades

ACTIVIDAD 1.4.1.1. A partir del gráfico de $y = \exp(x)$, analicen las siguientes cuestiones:

- ¿Cuál es la imagen de la función exponencial? (para ver cómo la gráfica se acerca al eje x, deberían hacer el gráfico con GeoGebra, y observarlo en detalle para valores de x cada vez más negativos).
- ¿Hay regiones donde la función sea creciente? ¿Hay regiones donde la función sea decreciente?
- ¿Hay puntos donde el valor de la función sea máximo o mínimo?

1.4.2 Operaciones logarítmicas y la función logaritmo natural

El logaritmo natural se define como la operación inversa de la exponencial natural:

Se dice que

$$y = \ln x \qquad \text{siempre que} \qquad x = e^y$$

Por ejemplo, usando esta definición con $x = e^3$ se encuentra que $\ln(x) = 3$.

Sin embargo, no siempre el logaritmo natural tiene sentido: no existe un resultado y para la expresión $\ln(-1)$, porque nunca e^y da -1 (como notamos en la gráfica de la función exponencial natural). En cambio, para $x > 0$ el logaritmo natural tiene un único resultado real.

La función logaritmo natural

Observando la gráfica de la función exponencial natural encontramos que se puede calcular el logaritmo natural de cualquier número positivo, obteniendo un y solo un resultado real. En cambio, no se puede calcular el logaritmo natural de ningún número negativo ni de 0. En consecuencia se puede definir una función:

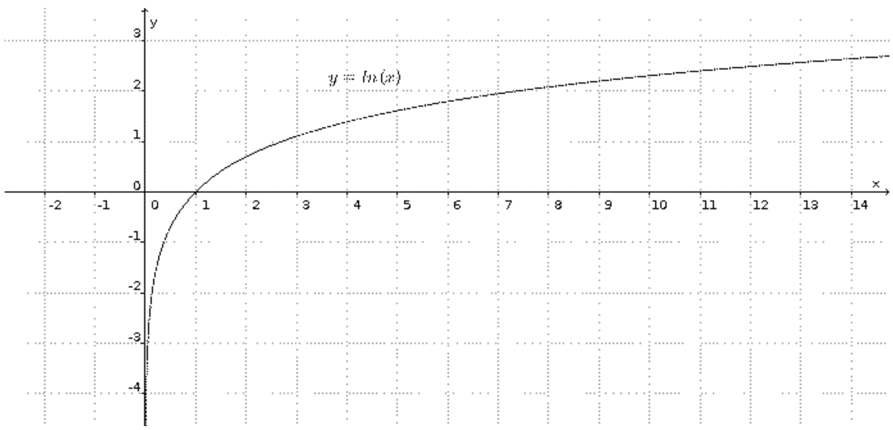
La función **logaritmo natural**

$$\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

se define con la regla de asignación

$$y = \ln(x) \qquad \textit{siempre que} \qquad x = e^y$$

Su gráfica se puede dibujar mirando la gráfica de la exponencial (intercambiando el rol de x e y) y resulta:



Cuando tengan que evaluar la función logaritmo natural, lo primero que deberían hacer es recordar y dibujar esta gráfica. La pueden usar tanto para reconocer que $y = \ln x$ como para reconocer que $x = e^y$.

Los valores precisos del logaritmo natural, cuando sean necesarios, se obtienen con calculadora o computadora.

Al igual que la exponencial natural, el logaritmo natural tiene notación propia: $\ln$. Además, se puede anotar la variable sin paréntesis y usar reglas particulares de escritura. Por ejemplo, en las expresiones

- $\ln x$
- $\ln^2 x$
- $\ln x^2$

el símbolo $\ln$ se considera suficiente para indicar el uso del logaritmo, y uno tiene que reconocer la variable y las operaciones involucradas: $\ln x = \ln(x)$, en tanto que $\ln^2 x = (\ln(x))^2$ pero $\ln x^2 = \ln(x^2)$. Estas formas de notación a principio complican el trabajo de los alumnos; cuando aparezcan, recomendamos reescribirlas con todos los paréntesis (para que se lea como cualquier función f).

La función logaritmo tiene propiedades de cálculo muy útiles. Recuerden que no tenemos una fórmula algebraica para calcular directamente un logaritmo, pero podemos manipular expresiones mediante las siguientes propiedades:

> La función logaritmo natural verifica:
> - $\ln(e^x) = x$ para todo x real.
> - $e^{\ln x} = x$ siempre que x sea positivo.
> - $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ siempre que a y b sean positivos.
> - $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ siempre que a y b sean positivos.
> - $\ln(b^r) = r \ln b$ siempre que b sea positivo, para todo r real (la mencionamos por conveniencia, aunque aún no discutimos qué significa b^r).

Actividades

Actividad 1.4.2.1. A partir de la definición de $y = \ln(x)$, calculen $\ln 0$, $\ln e$, $\ln(e^2)$, $\ln(1/e)$.

Actividad 1.4.2.2. A partir del gráfico de $y = \ln(x)$, analicen las siguientes cuestiones:

- ¿Hay regiones donde la función sea creciente? ¿Hay regiones donde la función sea decreciente?
- ¿Hay valores máximos o mínimos?
- ¿Qué pasa cuando la variable x se acerca a cero? (para ver cómo la gráfica se acerca al eje y deberían hacer el gráfico con GeoGebra y observarlo en detalle para valores de x cada vez más cercanos a cero).
- ¿Qué pasa cuando la variable x se hace cada vez más grande?

1.4.3 Exponenciales en base b

En una de las propiedades del logaritmo natural mencionamos una exponencial de base b. Eso nos lleva al problema que comentamos al inicio de esta sección: ¿qué significa una expresión como $4^{\sqrt{2}}$?

Usando exponenciales y logaritmos naturales, podemos darle sentido a b^x para cualquier base b positiva y cualquier exponente x real. Una forma de expresar b^x es la siguiente:

1. Usando propiedades de la exponencial y el logaritmo natural, escribimos $b = e^{\ln b}$.
2. Luego proponemos construir b^x como $\left(e^{\ln b}\right)^x$.
3. Asumiendo que vale la propiedad de "potencia de potencia", obtenemos la expresión $b^x = e^{(\ln b)x}$. Esta expresión involucra solamente la exponencial y el logaritmo naturales.

En rigor, hacemos un poco de trampa al usar la propiedad de "potencia de potencia" cuando aún no hemos definido qué significa "elevar a la x". Tomemos este cálculo como una motivación para **definir** la exponencial de base $b > 0$ en términos de la exponencial natural y el logaritmo natural que ya conocemos:

Dado un número real $b > 0$, llamado base, y un número real x cualquiera, se define

$$b^x = e^{x \cdot \ln b}$$

De acuerdo a este mecanismo podemos calcular ahora $4^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 4}$, usando solamente la exponencial y el logaritmo naturales.

Esta operación tiene un y solo un resultado, y en consecuencia define una función:

Dado un valor de $b > 0$, se llama **función exponencial de base** b *a*

$$\exp_b : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$$

dada por la regla de asignación

$$\exp_b(x) = b^x \equiv e^{x \cdot \ln b}$$

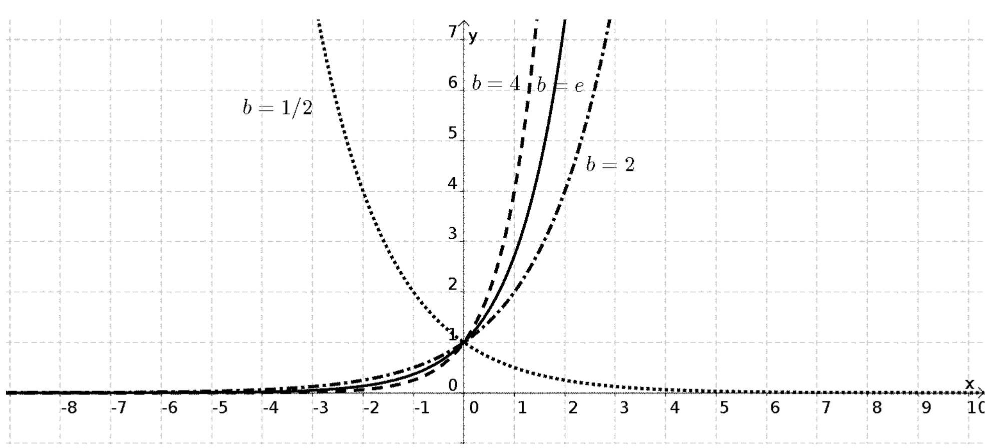
La gráfica de la función exponencial en distintas bases se puede obtener a partir de la exponencial natural. Observemos que la definición

$$\exp_b(x) = e^{x \cdot \ln b}$$

expresa una composición: dado x, primero se lo multiplica por el número $\ln b$ para obtener $u = x \cdot \ln b$ y luego se calcula e^u. En consecuencia, se genera una gráfica similar a la de e^x, pero dilatada, contraída o reflejada.

- Si $b > 1$, resulta $\ln b > 0$. Luego la gráfica se puede interpretar como una dilatación o contracción de la exponencial natural (dilatación si $\ln b < 1$, o contracción si $\ln b > 1$).
- Si $0 < b < 1$, tenemos que $\ln b$ es negativo. Luego la gráfica se puede interpretar como un escaleo de la exponencial natural seguido de una reflexión respecto del eje y.

Para algunos valores de b, las gráficas se ven como sigue. Intenten reconocerlas, de acuerdo al valor de la base.



Propiedades de cálculo

A partir de la definición $b^x = e^{x \cdot \ln b}$ se utilizan las propiedades de la exponencial natural y del logaritmo natural para demostrar las distintas propiedades de b^x. **Se puede operar con b^x como si fuera una potencia**, utilizando las siguientes propiedades:

> Para todo argumento real, la operación exponencial de base $b > 0$ verifica:
> - $b^x b^y = b^{x+y}$
> - $b^{-x} = 1/b^x$
> - $b^x / b^y = b^{x-y}$
> - $(b^x)^y = b^{xy}$

Actividades

Actividad 1.4.3.1. Usando propiedades de la exponencial y el logaritmo natural comprueben que, para $x = n$ natural, la definición de $b^n = e^{n \cdot \ln b}$ coincide con la potencia natural n. Como ejemplo, comprueben que $b^3 = e^{3 \ln b} = b.b.b$.

1.4.4 Función logaritmo de base b

Dado un número b positivo y distinto de 1, que se usa como "base", la operación logaritmo de base b se define como la inversa de la exponencial de base b. Aplicada a números positivos resulta una función:

La **función logaritmo de base** $b > 0$ *y* $b \neq 1$ *se define como operación inversa de la exponencial de base* b*:*

$$\log_b : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

con regla de asignación

$$y = \log_b(x) \qquad \text{siempre que} \qquad x = b^y$$

Podemos relacionar esta función con el logaritmo natural introduciendo un "cambio de base": usando que b^y significa $e^{y \ln b}$ escribimos

$$x = e^{y \ln b}$$

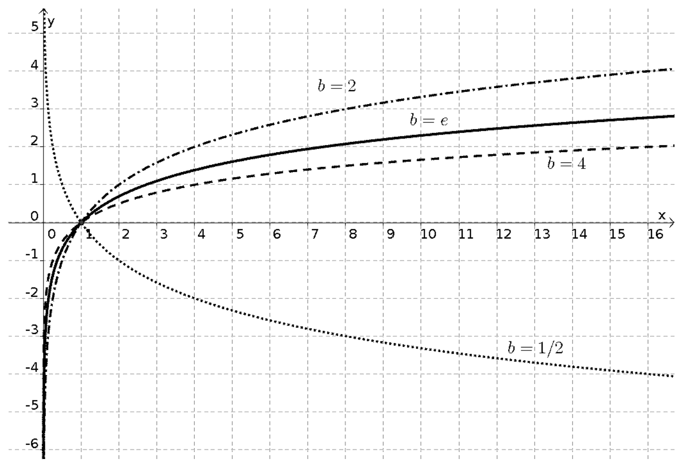
y tomamos logaritmo natural en ambos miembros:

$$\ln x = y \ln b$$

Usando $b \neq 1$sabemos que $\ln b \neq 0$, luego podemos despejar

$$y = \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Dependiendo del valor de b, la gráfica de $y = \log_b(x)$ se obtiene como un escaleo vertical de la gráfica del logaritmo natural (seguido de una reflexión respecto del eje x cuando $\ln b < 0$). Las gráficas de $y = \log_b(x)$, para algunos valores de b, se ven así:



Se pueden probar, a partir de propiedades de la exponencial de base b, algunas propiedades básicas de los logaritmos de base b:

- $\log_b(u.v) = \log_b u + \log_b v$
- $\log_b(u/v) = \log_b u - \log_b v$
- $\log_b(u^r) = r.\log_b u$

Actividades

ACTIVIDAD 1.4.4.1. Encuentren el valor exacto de
$\log_{10} 1000$, $\log_4 2$, $\log_9(1/3)$

ACTIVIDAD 1.4.4.2. Usando el logaritmo natural, resuelvan

- $2^x = 8$
- $10^{2x} = 10^8$

¿Hubiera sido conveniente resolverlo con logaritmos en otra base? ¿Obtendrían el mismo resultado?

Conclusión

La exponencial natural y el logaritmo natural son funciones fundamentales. Conviene recordar sus gráficos y la forma de operar con ellas.

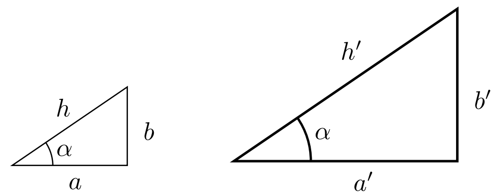
Las exponenciales y logaritmos de base b ($b > 0$ y $b \neq 1$) se pueden escribir en términos de la exponencial y el logaritmo natural:

$$b^x = e^{(\ln b)x}$$
$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Sugerimos expresarlas así, y luego trabajar con exponenciales y logaritmos naturales.

1.4.5 Triángulos rectángulos y trigonometría del primer cuadrante

Las nociones básicas de trigonometría se aplican a la descripción de triángulos rectángulos. Se sabe (por el Teorema de Tales) que triángulos rectángulos construidos con un mismo ángulo agudo α tienen sus lados proporcionales:



$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$$
$$\frac{b}{h} = \frac{b'}{h'}$$
etc.

Usando la notación de la figura se definen las relaciones trigonométricas como las razones (o cocientes) entre los catetos a y b y la hipotenusa h:

$$\text{sen}\alpha = \frac{b}{h}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{h}$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a}$$

Por la mencionada proporcionalidad (semejanza de triángulos), estos cocientes dan el mismo valor si cambiamos el tamaño del rectángulo y usamos a', b' y h'. Por eso podemos indicar que dependen solo del ángulo α.

El Teorema de Pitágoras asegura además que la longitud de la hipotenusa relacionada con la longitud de los catetos,

$$a^2 + b^2 = h^2$$

Una consecuencia importante es que para todo ángulo agudo α se cumple

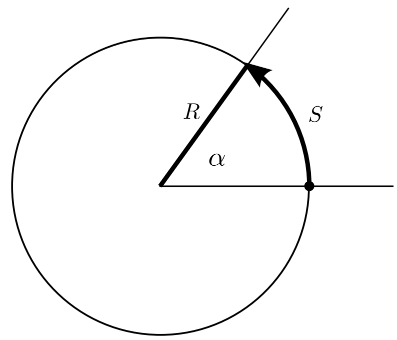
$$(\text{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

Medida de ángulos en radianes

Para que valgan algunas propiedades de las funciones seno, coseno y tangente que veremos en este curso, los ángulos deben medirse en radianes.

Recuerden que a un ángulo α se le asigna un valor en radianes de la siguiente manera:

- se lo dibuja
- se traza una circunferencia de radio R con centro en el vértice del ángulo
- se mide la longitud S del arco de circunferencia encerrado por el ángulo
- se calcula el cociente de longitudes S/R



Se llama **medida de un ángulo** α **en radianes** *al cociente* S/R *en la construcción de la figura. Se anota*

$$\alpha = \frac{S}{R}$$

- La medida de un ángulo en radianes no depende del radio elegido, por razones de semejanza.
- La medida de un ángulo en radianes no tiene unidades (se dice que es adimensional). Por ejemplo, si medimos S y R en centímetros, al hacer el cociente se simplifican los cm y no quedan unidades.
- Los ángulos en el plano se pueden **orientar**, eligiendo un lado como inicial y el otro como final. Se dice que un ángulo es positivo si el arco entre el lado inicial y el lado final se recorre en sentido anti-horario $\circlearrowleft$, y es negativo si el arco se recorre en sentido horario $\circlearrowright$.

EJEMPLO 1.4.5.1. Como primer ejemplo podemos calcular la medida en radianes de un ángulo recto: dado que la longitud de la circunferencia completa de radio R vale $2\pi R$, y un ángulo recto encierra exactamente un cuarto de circunferencia, la longitud del arco encerrado vale $2\pi R/4 = \pi R/2$. Luego el ángulo recto en radianes mide

$$\alpha = \frac{\pi R/2}{R} = \frac{\pi}{2}$$

Recordemos que π es un número, que vale aproximadamente $\pi \approx 3.1416$. Por lo tanto el ángulo recto mide $\alpha \approx 1.5708$ radianes. En la práctica resulta más significativo leer $\alpha = \pi/2$ que leer $\alpha \approx 1.5708$, por lo que se acostumbra dejar indicado el número π como una letra.

Para los llamados ángulos notables, $\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$, se pueden usar relaciones geométricas de triángulos para expresar las coordenadas involucradas y calcular **exactamente** las funciones trigonométricas. Lo dejamos sugerido como actividad.

Las medidas de ángulos en radianes o en grados sexagesimales se relacionan por regla de tres simple. Como referencia, podemos recordar que un ángulo llano de 180^o mide π radianes.

Si anotamos α_G a la medida de un ángulo en grados y α_R a la medida del mismo ángulo en radianes, la regla de tres nos dice que

$$\begin{array}{rcl} 180^o & \longrightarrow & \pi \\ \alpha_G & \longrightarrow & \alpha_R \end{array}$$

Resolviendo encontramos que

$$\alpha_R = \frac{\pi}{180^o}\alpha_G$$

Actividades

ACTIVIDAD 1.4.5.1.

- Calculen la medida en radianes de los ángulos notables de 30^o, 45^o y 60^o.

- Grafíquenlos en la circunferencia y visualicen las medidas en radianes como fracciones de π.
- Intenten calcular exactamente el seno y el coseno de los ángulos de 0^o, 30^o, 45^o, 60^o y 90^o. Conviene recordar los resultados con alguna regla ayuda-memoria, como la tabla

ángulo	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

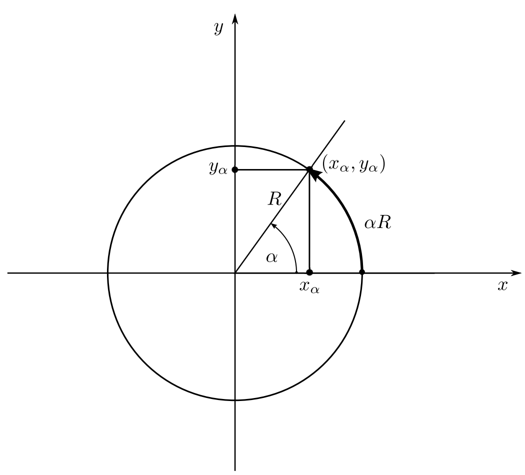
1.4.6 Funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes

Las funciones trigonométricas se aplican a variables reales, que se entienden como la medida α de un ángulo en radianes. Conviene dibujar este ángulo en el plano cartesiano, con su vértice en el origen y un **lado fijo** sobre el semieje x positivo; a partir de allí el ángulo se abre como un abanico, hasta ubicar el segundo lado (llamado **lado móvil**) en el valor α. Se admiten ángulos con medida positiva, que se abren en sentido anti-horario, y ángulos con medida negativa, que se abren en sentido horario. Se permite que el lado móvil quede en cualquier cuadrante del plano, y que gire más de una vuelta (el valor del ángulo crece 2π radianes por cada vuelta acumulada).

Funciones seno y coseno

Para construir las funciones trigonométricas de un ángulo de medida α radianes, se procede así:

- se dibuja una circunferencia de radio R (arbitrario) con centro en el origen del plano cartesiano
- a partir del punto $(R, 0)$ se recorre un arco de circunferencia de longitud $|\alpha|R$, en sentido anti-horario ⥀ si $\alpha > 0$ u horario ⥁ si$\alpha < 0$
- así queda determinado un punto de coordenadas (x_α, y_α) sobre la circunferencia; el ángulo con vértice en el origen, un lado inicial sobre el semieje x positivo y un lado final que pasa por el punto (x_α, y_α) de la circunferencia tiene medida α en radianes
- con las coordenadas del punto (x_α, y_α) y la medida del radio R se calculan las funciones trigonométricas de α



Las funciones trigonométricas que primero conviene conocer son el seno y el coseno:

Con las coordenadas del punto (x_α, y_α) se definen

- **Función seno**: *sen* : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\text{sen}\,(\alpha) = y_\alpha/R$$

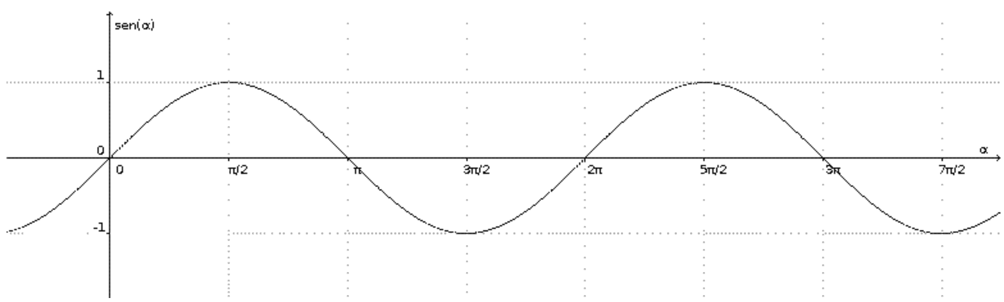
- **Función coseno**: $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

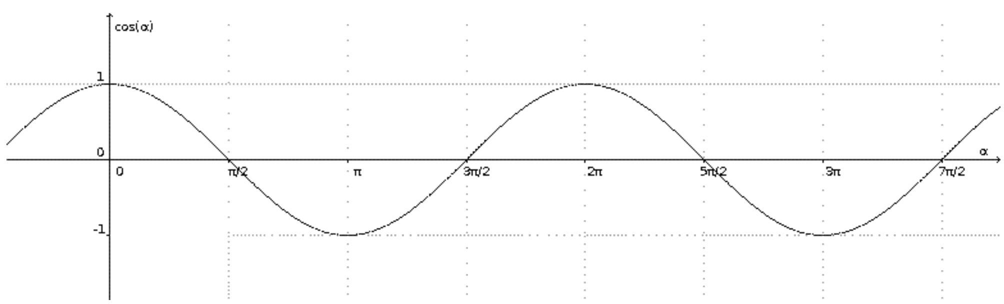
$$\cos\,(\alpha) = x_\alpha/R$$

Observaciones:

- Si usamos $R = 1$ esta construcción se llama **circunferencia trigonométrica**. La ventaja es que la división por 1 es trivial y nos permite visualizar sen(α) directamente como la coordenada y_α y $\cos(\alpha)$ directamente como x_α.
- Las coordenadas x_α e y_α pueden ser nulas, positivas o negativas. En consecuencia $\cos(\alpha)$ y sen(α) tienen signo $+$ o $-$ según el cuadrante en que se ubique el lado final del ángulo α.
- Notación: las funciones seno y coseno tienen nombre propio. En vez de inventar una letra para nombrarlas se usa sen(α) y $\cos(\alpha)$. Más aún, es usual no usar los paréntesis y escribir directamente sen α o $\cos\,\alpha$. Al principio les resultará conveniente agregar los paréntesis para acostumbrarse a manejar sen(α) y $\cos(\alpha)$ en pie de igualdad con cualquier otra función.

En general no hay manera de calcular algebraicamente el resultado de las funciones seno y coseno de un número dado. Por eso es muy importante recordar sus gráficos:





En adelante, cada vez que tengan que evaluar un seno o un coseno les recomendamos que dibujen al margen un esquema de estos gráficos (¡antes de recurrir a la calculadora!) .

El seno y coseno de $\alpha = 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi$ (cuando el lado final del ángulo cae sobre un eje cartesiano) se leen directamente del gráfico o de la circunferencia trigonométrica. Es importante reconocer para qué ángulos el seno y coseno valen 1, 0 o -1.

Otras funciones trigonométricas

A partir del seno y el coseno se definen las demás funciones trigonométricas como cocientes. Obviamente, no están definidas cuando el divisor vale 0.

Dado un número α real, se definen las funciones:

- tangente, dada por
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \text{ (si } \cos(\alpha) \neq 0 \text{)}$$
- cotangente, dada por
$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} \text{ (si sen}(\alpha) \neq 0 \text{)}$$
- secante, dada por
$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} \text{ (si } \cos(\alpha) \neq 0 \text{)}$$
- cosecante, dada por
$$\text{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)} \text{ (si sen}(\alpha) \neq 0 \text{)}$$

Recomendamos siempre trabajar estas funciones reemplazándolas por su expresión en términos de senos y cosenos. Cuando ganen confianza, pueden recordar reglas prácticas para trabajar directamente con ellas. Y siempre que no estén seguros, vuelvan a escribirlas en términos de senos y cosenos.

Actividades

ACTIVIDAD 1.4.6.1. Para algunos ángulos particulares se puede calcular geométricamente el seno y el coseno. Encuentren así todos los ángulos α entre 0 y 2π que verifiquen:

- $\cos\alpha = 1$
- sen$\alpha = 1/2$
- $\cos\alpha = 0$

GEOGEBRA 1.4.6.2. Las funciones trigonométricas están predefinidas en GeoGebra. La variable, como en las demás funciones, se puede llamar x. Los nombres que reconoce el programa son

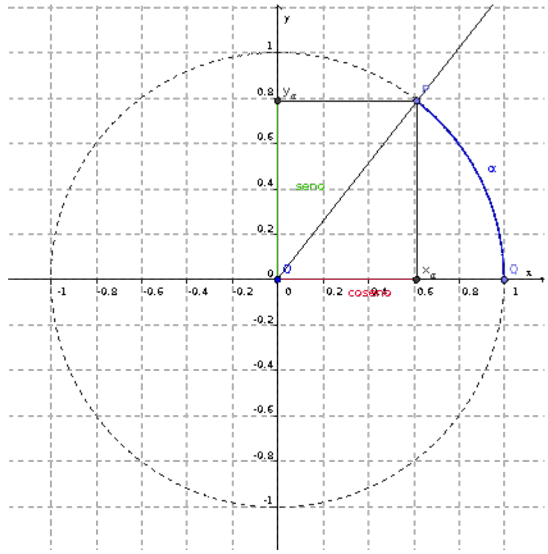
```
sin(x), cos(x), tan(x),
cot(x), sec(x), cosec(x)
```

- Grafiquen sen x y $\cos x$, y describan las características observadas (ceros, máximos, mínimos, regiones de positividad y negatividad, etc.)
- Anticipen características de la gráfica de $\tan x$, construida como cociente de las dos gráficas construidas. Indiquen su dominio natural y su imagen.
- Grafiquen $\tan x$ con GeoGebra para comprobar sus observaciones.

GEOGEBRA 1.4.6.3. Como ya habrán notado, GeoGebra es mucho más que un programa para graficar.

Si les interesa profundizar en las posibilidades del programa, pueden hacer con GeoGebra una circunferencia trigonométrica dinámica: si lo hacen adecuadamente, el punto $P = (x_\alpha, y_\alpha)$ se podrá mover con el mouse; el seno y coseno estarán a la vista y sus valores se leerán en el panel algebraico.

Podría verse similar a la figura:



A continuación les damos algunas instrucciones para hacerlo:

Pueden crear la circunferencia con la entrada

```
x^2+y^2=1
```

El punto P sobre la circunferencia, el origen O y un punto Q sobre el semieje horizontal positivo se pueden crear con el mouse.

El ángulo α se puede crear con la herramienta "Ángulo", haciendo click en orden sobre los puntos Q, O, P.

La semirrecta desde el origen, que pasa por el punto, se puede crear con la herramienta "Semirrecta que pasa por dos puntos".

Las rectas que pasan por el punto P y son perpendiculares a los ejes se pueden crear con la herramienta "Recta Perpendicular".

Los puntos x_α e y_α sobre los ejes se pueden crear con la herramienta "Intersección entre Dos Objetos". Sus coordenadas permiten leer el valor del seno y coseno del ángulo.

Con este esquema, los objetos creados están asociados al punto P. Al mover P con el mouse, lo acompañan todos los objetos asociados.

Para limpiar y destacar el gráfico, se pueden editar las propiedades de cada objeto: renombrar, mostrar/ocultar, color, estilo de trazo, etc.

1.4.7 Identidades trigonométricas

Las funciones trigonométricas tienen numerosas relaciones entre sí, conocidas como identidades trigonométricas. El uso de propiedades adecuadas puede simplificar cualquier trabajo, reemplazando expresiones elaboradas por expresiones más sencillas. Sin embargo, no podríamos recordarlas todas.

Recomendamos recordar bien unas pocas relaciones básicas:

- para cualquier número α,
$$(\text{sen}(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$$
Esta identidad se conoce como **relación pitagórica**; se demuestra aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se dibuja en la circunferencia trigonométrica.

- para cualesquiera dos números α y β,

$$\begin{aligned} \text{sen}\,(\alpha+\beta) &= \text{sen}\,(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\,\text{sen}\,(\beta) \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)-\text{sen}\,(\alpha)\,\text{sen}\,(\beta) \end{aligned}$$

  Estas identidades se demuestran a partir de la suma de ángulos dibujados en la circunferencia trigonométrica. Noten que valen para β negativo, es decir que también permiten calcular seno y coseno de una resta.

- la función seno es impar: para cualquier número α,

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$$

- la función coseno es par: para cualquier número α,

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

Con estas relaciones básicas y un poco de práctica podrán ustedes mismos generar muchas otras relaciones útiles.

Notación: van a encontrar una notación especial para las potencias de funciones trigonométricas, anotando el exponente junto a los símbolos sen o $\cos$. Por ejemplo,

$$\text{sen}^2\alpha \text{ significa } (\text{sen}(\alpha))^2$$

En el resto del curso será habitual usar la letra x como variable independiente de las funciones trigonométricas, en pie de igualdad con otras funciones, escribiendo por ejemplo

$$y = f(x) = \cos x$$

No se debe confundir el uso de x e y como variables de la función con el uso de x e y como coordenadas en la circunferencia trigonométrica.

Actividades

Actividad 1.4.7.1. A partir del seno y coseno de una suma, prueben que

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha \\ \text{sen}(2\alpha) &= 2\text{sen}\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

Usando ahora la identidad pitagórica, demuestren que

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha &= \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \\ \text{sen}^2\alpha &= \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \end{aligned}$$

Para la resta de dos ángulos, prueben que

$$\begin{aligned} \text{sen}\,(\alpha-\beta) &= \text{sen}\,(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\,\text{sen}\,(\beta) \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)+\text{sen}\,(\alpha)\,\text{sen}\,(\beta) \end{aligned}$$

Estas identidades son de uso frecuente y es útil recordarlas. Sin embargo siempre pueden volver a obtenerlas recordando simplemente la identidad pitagórica, el seno y coseno de una suma y la paridad de seno y coseno.

ACTIVIDAD 1.4.7.2. Comprueben con un ejemplo que

$$\text{sen}(2x) \neq 2\text{sen}(x)$$

y que

$$\cos(2x) \neq 2\cos(x)$$

GEOGEBRA 1.4.7.3. Grafiquen $\text{sen}(2x)$ y $2\text{sen}x\cos x$ para verificar que los valores de ambas expresiones coinciden, para cualquier valor de x.

1.4.8 Funciones trigonométricas hiperbólicas

Las llamadas funciones trigonométricas hiperbólicas se pueden definir geométricamente a partir de las coordenadas de puntos sobre una hipérbola en forma análoga a la construcción de la circunferencia trigonométrica (pueden ver por ejemplo la página "Función Hiperbólica" de la Wikipedia).

No discutiremos ese aspecto, ya que afortunadamente las funciones trigonométricas hiperbólicas se pueden calcular con operaciones algebraicas sencillas entre funciones exponenciales. En la práctica conviene recordar como definiciones:

Se llama **seno hiperbólico** *a la función*

$$\textit{senh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ con regla de asignación } \textit{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Se llama **coseno hiperbólico** *a la función*

$$\cosh: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ con regla de asignación } \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Se llama **tangente hiperbólica** *a la función*

$$\tanh: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ con regla de asignación } \tanh(x) = \frac{\textit{senh}(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Cuando tengan que trabajar con estas funciones, les recomendamos que las escriban en término de exponenciales.

Identidades trigonométricas hiperbólicas

En forma análoga a las identidades trigonométricas, existen numerosas identidades entre las funciones trigonométricas hiperbólicas. Vale la pena recordar que

- para cualquier número x,

$$(\cosh(x))^2 - (\text{senh}(x))^2 = 1$$

Actividades

ACTIVIDAD 1.4.8.1. Escribiendo $\text{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, demuestren que $(\cosh(x))^2 - (\text{senh}(x))^2 = 1$.

1.5 Modelos, magnitudes y unidades

Las funciones utilizadas para modelar situaciones reales relacionan **magnitudes**. Las magnitudes expresan cantidades medibles, como la masa, la presión, la temperatura, el tiempo, la corriente eléctrica, etc.

Para cada magnitud se han definido **unidades** apropiadas, incluso (por razones históricas) distintas unidades para una misma magnitud. Por ejemplo, la masa de una sustancia se puede expresar en gramos, kilogramos, libras, onzas, etc. El Sistema Internacional de Unidades (abreviado SI) es el nombre que recibe el sistema de unidades que se usa en casi todos los países. Los alumnos de ciencias necesitan estar familiarizados con el uso y los cambios de unidades en cada tema que incorporen.

Las unidades son parte de las expresiones matemáticas que se construyen en las aplicaciones. Las unidades apropiadas a cada magnitud se manejan como letras en una expresión algebraica: se sacan de factor común, se multiplican y dividen, se simplifican, etc.

> EJEMPLO 1.5.0.1. La distancia d recorrida por un objeto en movimiento se puede medir en metros (m), y el tiempo t en segundos (s). Digamos que el objeto recorrió $d = 5\,m$ en $t = 20\,s$.
>
> La velocidad media del movimiento se calcula como el cociente $v_{media} = d/t$. Entonces,
>
> $$v_{media} = \frac{5\,m}{20\,s} = 0.25\,\frac{m}{s}$$
>
> La fórmula $v_{media} = d/t$ para calcular la velocidad media determina las unidades del resultado: m/s. Se dice que la velocidad tiene unidades derivadas de las unidades de longitud y de tiempo.

Los cursos de Análisis Matemático suelen evitar el manejo de unidades, para aliviar la notación, y presentan sus ejemplos con variables **adimensionales**. Un recurso típico es enunciar, por ejemplo,

> EJEMPLO 1.5.0.2. La presión en un fluido depende de la profundidad según la relación
>
> $$p(h) = 0.4\,h + 2$$
>
> donde la profundidad h se mide en metros y la presión p se obtiene en atmósferas.
>
> Se dice que la relación se ha adimensionalizado. Esta fórmula corresponde ciertamente a una relación con unidades, que en forma completa se puede recuperar como
>
> $$p(h) = 0.4\frac{atm}{m}\,h + 2\,atm$$
>
> Podemos evaluar la función con las unidades a la vista, con lo cual aparecen naturalmente las unidades del resultado. Por ejemplo, $p(3\,m) = 0.4\frac{atm}{m}\,3\,m + 2\,atm = 2.4\,atm$.

El manejo de unidades es muy importante, porque nos permite escribir relaciones que serán válidas incluso al cambiar de unidades. Por ejemplo, un dato de longitud puede estar dado como $100\,cm$ o como $1\,m$, y las ecuaciones que aprendamos deben permitirnos cualquiera de las dos formas. En una relación escrita con unidades, simplemente usaremos el dato (con sus unidades), y veremos qué sale. Si es conveniente, podremos reemplazar formas alternativas de los datos: 60 minutos en lugar de 1 hora, etc.

Actividades

ACTIVIDAD 1.5.0.1. El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado describe la posición x de un objeto en un eje recto en función del tiempo mediante la función $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, donde x_0, v_0 y a son constantes.

En un caso en que $x_0 = 100\,cm$, $v_0 = 5\,km/h$ y $a = 2\,m/s^2$,

1. calculen la posición cuando el tiempo vale 2 minutos.

2. elaboren una fórmula adimensionalizada que dé el valor numérico de la posición en metros cuando se introduce el valor numérico del tiempo medido en segundos.

Puede pasar que por acostumbrarnos a las funciones adimensionalizadas tengamos luego alguna dificultad para aplicar funciones en otros contextos. Intentaremos mantener presente esta cuestión cada vez que discutamos modelos de aplicación.

Notaciones informales.

En los modelos aplicados conviene usar letras que permitan leer fácilmente las distintas magnitudes. Más arriba hemos usado x para la coordenada de la posición de un objeto sobre un eje (como haríamos en geometría), p para la presión y t para el tiempo. También usamos h para la profundidad, o para alturas; esta costumbre proviene de height en inglés o de Hohe en alemán (¡en español altura no se escribe con h!)

Una vez que las letras se asocian a las magnitudes, no conviene introducir nuevas letras para indicar las funciones: cuando p depende de h no escribimos $p = f(h)$ sino que directamente escribimos "la función $p(h)$".

Siguiendo esta costumbre, cuando y es función de x podemos escribir "la función $y(x)$" o incluso hablar de "la función y".

Estas notaciones informales agilizan la aplicación de los conceptos de Análisis Matemático como herramientas. Aunque a veces, cuando uno se empieza a complicar, verán que hay que tomarse un momento para escribir todo completo y pensar con calma.

CAPÍTULO 2
Límites y continuidad

Contenidos del capítulo: límites para x tendiendo a un valor finito. Límites laterales. Límites finitos, infinitos y oscilantes.
Continuidad en un punto. Discontinuidades. Asíntotas verticales.
Reglas para operar con límites finitos. Reglas para operar con límites nulos y con límites infinitos. Límites indeterminados.
Continuidad en intervalos. Teorema del Valor Intermedio.

2.1 Límite de una función $f(x)$ para x tendiendo a un valor finito

Contenidos de esta sección: límite para $x \to x_0$ finito. Límites laterales. Límites finitos, infinitos y oscilantes. Nociones intuitivas y definiciones formales.

En las materias troncales de sus carreras les explicarán distintas leyes y modelos matemáticos de la Naturaleza, y allí verán que no son suficientes los cálculos algebraicos. Verán que se utilizan funciones, y que se las relaciona mediante **derivadas** (dando lugar a **ecuaciones diferenciales**) y mediante **integrales** (para llegar a las fórmulas aplicadas).

Para comprender el contenido de esos modelos, o más precisamente qué significan las derivadas e integrales en esos modelos, necesitamos primero adquirir la noción de **límite**. Más aún, la noción de límite que exploramos en este capítulo es el concepto fundamental que permitió el desarrollo del Análisis Matemático, tal como lo conocemos en la actualidad. Este capítulo está dedicado, entonces, a sentar las bases del resto del curso.

2.1.1 Noción de límite para x tendiendo a un valor finito

Vamos discutir algunas ideas, antes de construir definiciones formales. Para empezar, ¿a qué se refieren las palabras que están en el título de esta sección?

Cuando hablamos de límite de una función $y = f(x)$ hablamos de describir el **comportamiento de la función** en una región particular de su dominio.

En primer lugar, no se trata de calcular solo un número, como hacemos para calcular el valor de $f(x_0)$ en un dado valor de x_0. Se trata de observar **todos los valores que va tomando la función** cuando x es variable, dentro de un **cierto conjunto de valores** de x. Cuando decimos límite para x tendiendo a un valor finito, por ejemplo **"límite para x tendiendo a 0"**, estamos diciendo que la región que nos interesa es la de valores de x **bien cercanos** a 0, pero que **no vamos a considerar x precisamente igual** a 0.

En segundo lugar, el resultado esperado al estudiar un límite no es en principio un número, sino algo que nos permita caracterizar **el comportamiento de la función**. Puede ocurrir que el límite exista, o que no exista. Incluso cuando el límite no existe discutiremos por qué, y encontraremos formas de describir el comportamiento de la función cerca de x_0.

Intentemos darle sentido a estas ideas en algunos ejemplos. Luego haremos las ideas más precisas, hasta llegar a las definiciones formales.[1]

EJEMPLO 2.1.1.1. Las variables usadas para describir un sistema en estado gaseoso son su presión P, su temperatura T y el volumen V que ocupa, además del número de moles n que indica la cantidad de materia del sistema. Según el modelo de gases ideales, estas variables están relacionadas por la ecuación de estado

$$PV = nRT$$

donde $R = 8,31\frac{J}{K \cdot mol}$ es la constante universal de los gases ideales. Mientras se mantenga fija la temperatura y el número de moles, podemos escribir la relación entre presión y volumen con la función

$$P(V) = nRT \cdot \frac{1}{V}$$

Si pensamos en comprimir el gas hasta un volumen pequeño,

- ¿se puede calcular la presión cuando el volumen es bien pequeño?
- si pensaron en cierto volumen, por ejemplo 0.001 litros, ¿se puede comprimir el gas a un volumen más pequeño?
- ¿qué sucede con la presión a medida que se logran volúmenes todavía más pequeños?
- ¿se puede calcular la presión cuando el volumen es estrictamente $V = 0$?

En este ejemplo estamos pensando en un límite: aparte de los datos constantes n, R y T, nos interesa la parte variable $1/V$ cuando V tiende a 0. Llamemos $f(V) = 1/V$ y notemos que el volumen es una cantidad positiva, es decir que el dominio de la función $f(V)$ es el intervalo $(0, +\infty)$. En consecuencia el análisis del límite solo involucra valores de V mayores a 0, por lo que decimos que se estudian valores de V tendiendo a 0 por la derecha.

Hay una notación particular para referirse a este estudio. Se dice que estamos calculando un **límite lateral**, que se anota en símbolos

$$\lim_{V \to 0^+} f(V)$$

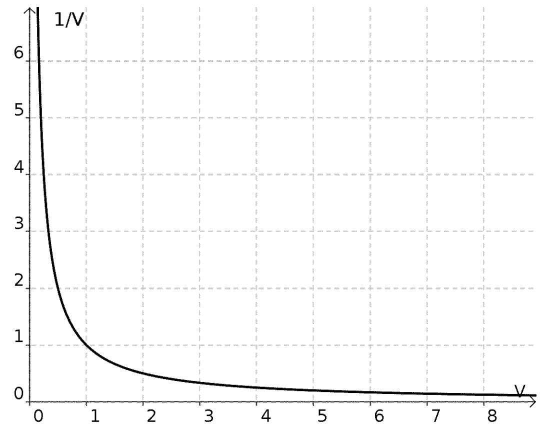
y se lee "**límite de $f(V)$ para V tendiendo a 0 por la derecha**".

Esta notación plantea la pregunta: "¿cómo se comporta la función $f(V)$ cuando V tiende a 0 por la derecha?". Para contestarla, tenemos al menos tres estrategias:

1. **Exploración gráfica.** Si tenemos un buen gráfico de la función $f(V)$, que llegue hasta $V = 0$ sin tocarlo, podemos observar qué pasa con el valor de $f(V)$ (es decir, la altura de la gráfica) a medida que V se vuelve más y más pequeño.
2. **Exploración numérica.** Podemos construir una tabla de valores $(V, f(V))$ con valores de V tan pequeños como se nos ocurra, y observar los correspondientes valores de $f(V)$.
3. **Exploración analítica.** Es más abstracta que las anteriores, se trata de razonar qué pasa con el valor de la expresión $1/V$ cuando V se hace arbitrariamente pequeño, sin llegar a valer cero.

EJEMPLO 2.1.1.2. Sigamos con el ejemplo anterior. Empecemos con la **exploración gráfica**. Un gráfico de la función $f(V) = 1/V$, hecho con GeoGebra, se ve así:

[1] Nos parece más importante que incorporen las nociones de límites, antes que las definiciones. Es necesario que construyan su propia intuición acerca del manejo de límites, y luego logren asociar esa intuición con las definiciones formales.



- ¿qué sucede con la presión a medida que se considera un volumen cada vez más pequeño?
- ¿pueden ver la altura de la gráfica con V tan pequeño como ustedes quieran?
- si trabajan en la computadora y cambian la escala de los ejes, ¿pueden ver la altura de la gráfica con valores de V más pequeños que antes? ¿podrán verla para **cualquier** valor $V > 0$?

Aunque el gráfico tenga sus limitaciones de tamaño, lo que vemos nos alcanza para afirmar: cuando V tiende a 0 por derecha, los valores de $f(V)$ crecen por encima de cualquier valor dado.

Ahora que ya intuimos el comportamiento, hagamos una **exploración numérica**: completen la siguiente tabla de valores, agregando algunos renglones con volúmenes más pequeños:

V (en litros)	$1/V$ (en 1/litros)
0.001	
0.0001	
0.000001	
$\vdots$	

- ¿tiene sentido llegar al valor de $V > 0$ más pequeño posible?
- a partir de los valores que hayan tabulado, ¿pueden intuir qué pasará con valores aún más pequeños?
- ¿pueden afirmar el mismo resultado que obtuvimos de la exploración gráfica?

Ahora que ya hicimos una exploración numérica, intenten una **exploración analítica**: dado que tenemos un cociente con numerador constante (1) y denominador variable (V positivo),

- ¿cómo cambia el cociente cuando disminuye el denominador?
- ¿hasta cuánto podemos disminuir el denominador?
- ¿hasta cuánto crece el resultado del cociente?

Por los tres procedimientos obtenemos la misma conclusión: **el valor de $1/V$ resulta tan grande como queramos, con la condición de tomar el volumen tan pequeño como sea necesario para ello**.

En esta situación se dice que "**$1/V$ tiende a más infinito cuando V tiende a 0 por la derecha**", lo que se anota en símbolos

$$\frac{1}{V} \to +\infty \text{ cuando } V \to 0^+$$

También vamos a escribir

$$\lim_{V \to 0^+} \frac{1}{V} = +\infty$$

que se lee "**el límite de $1/V$ cuando V tiende a 0 por la derecha no existe porque la función tiende a más infinito**", o más brevemente "**el límite de $1/V$ cuando V tiende a 0 por la derecha es más infinito**".

Ambas notaciones significan lo mismo. No expresan el resultado de una cuenta, sino el resultado de un **estudio de comportamiento**. Es muy importante advertir que al escribir $\lim_{V\to 0^+} \frac{1}{V} = +\infty$ el signo "=" no significa una igualdad entre números: el lado izquierdo es un símbolo que representa la exploración de la función para valores de la variable en una región del dominio, y en el lado derecho $+\infty$ no es un número, sino un símbolo para indicar que los valores de la función devienen arbitrariamente grandes.

Con este ejemplo tenemos una mejor idea de lo que intentamos escribir en el primer párrafo de esta clase: estudiar un límite para $x \to x_0$ es estudiar el comportamiento de la función para valores de x arbitrariamente cercanos a x_0, sin llegar a considerar x igual a x_0.

En general, podremos explorar valores de x tanto por la derecha como por la izquierda de un dado valor x_0. Y además del visto en el ejemplo anterior, hay otros comportamientos posibles de la función explorada. Sigamos elaborando estas ideas en nuevos ejemplos.

EJEMPLO 2.1.1.3. Vamos a analizar la función

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

cerca de $x_0 = 1$. En primer lugar vemos que $f(x)$ no está definida para $x_0 = 1$ (porque se anula el denominador), pero sí está definida alrededor de ese punto. Podemos realizar una **exploración numérica** mediante una tabla con valores tan cercanos a 1 como queramos, para tratar de determinar el comportamiento de la función cerca de 1. Completen la siguiente tabla

x tiende a 1 *por la izquierda* $\rightarrow$ $\qquad$ $\leftarrow x$ tiende a 1 *por la derecha*

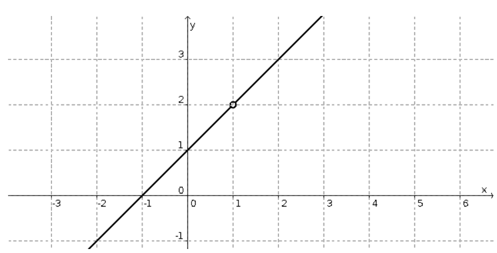
x	0.75	0.9	0.99	0.999	$\cdots 1 \cdots$	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$					?				

$f(x)$ tiende a ... $\qquad$ $f(x)$ tiende a ...

y a partir de ella, respondan

- ¿cuál parece ser el valor al que la función se acerca cuando x está más y más cerca de 1?
- ¿es distinta la respuesta al considerar x a la izquierda o a la derecha de $x_0 = 1$?

Comprueben ahora si su respuesta es correcta mediante una **exploración gráfica** en computadora. Recuerden que no hay un punto encima de $x_0 = 1$ (aunque algunos programas no indiquen el hueco) porque 1 no está en el dominio de $f(x)$. Van a obtener algo como



Para hacer una **exploración analítica** conviene reescribir la fórmula de la función y simplificarla:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = x+1$$

notando que la última igualdad tiene sentido solo para $x \neq 1$ (porque la expresión de la izquierda no está definida cuando $x = 1$). Encontramos que

$$f(x) = x+1, \text{ si } x \neq 1$$

Esta expresión nos permite entender la gráfica anterior (una recta con un hueco) y convencernos de que los valores de $f(x)$ se acercan a 2 cuando x se acerca a 1.

El comportamiento de $f(x)$ en este ejemplo, cerca de $x_0 = 1$, es **finito**: tanto por la izquierda como por la derecha de 1 encontramos que los valores de la función **se acercan tanto como queramos al valor** 2**, bajo la condición de tomar** x **tan cerca de** 1 **como sea necesario**. En esta situación se dice que "$f(x)$ **tiende a** 2 **cuando** x **tiende a** 1", que en símbolos se anota

$$f(x) \to 2 \text{ cuando } x \to 1$$

o bien

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

que se lee "**el límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** 1 **es igual a** 2".

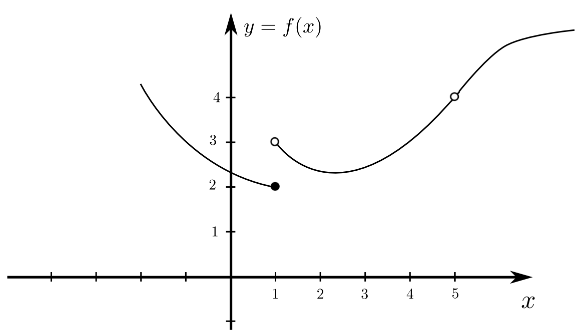
Con estos ejemplos hemos ilustrado algunos de los distintos comportamientos que se pueden encontrar al analizar el límite de una función $f(x)$ para x tendiendo a un valor dado x_0. En la próxima sección introducimos las correspondientes definiciones.

Actividades

ACTIVIDAD 2.1.1.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes preguntas:

- ¿Qué significado encuentran en la expresión $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -3$? Ilustren la situación con una gráfica.
- ¿Qué significado encuentran en la expresión $\lim_{x \to -2} f(x) = 5$? Ilustren la situación con una gráfica.
- ¿Qué significado encuentran en la expresión $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$? Ilustren la situación con una gráfica.

ACTIVIDAD 2.1.1.2. Observando la gráfica dada, analicen si existen y cuánto valen las siguientes cantidades:
a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$; b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$; c) $\lim_{x \to 1} f(x)$; d) $f(1)$;
e) $\lim_{x \to 5^-} f(x)$; f) $\lim_{x \to 5^+} f(x)$; g) $\lim_{x \to 5} f(x)$; h) $f(5)$



¿Algunas de esas cantidades coinciden entre sí? Interpreten el significado de esas coincidencias.

GEOGEBRA 2.1.1.3. Con GeoGebra pueden hacer rápidamente tablas de valores. Una vez definida la función $f(x)$, abran la Vista Hoja de Cálculo y escriban los valores deseados de x en una columna, digamos la columna A. En la columna siguiente, casillero B1, escriban

```
f(A1)
```

Verán el valor de $f(x)$ correspondiente al dato escrito en el casillero A1. Para completar la tabla, seleccionen el casillero B1 y arrastren hacia abajo el cuadradito que aparece en una de sus esquinas. Esta funcionalidad es similar a cualquier software de planilla de cálculo.

Con esta facilidad pueden explorar límites numéricamente. Intenten rehacer el ejemplo 2.1.1.2 con muchos más valores que los que hicieron a mano. Para ver números con muchos decimales vayan a Opciones, Redondeo.

2.1.2 Definiciones de límites para $x \to x_0$

Hay una variedad de comportamientos posibles para una función cuando su variable tiende a un valor dado, por eso hay una variedad de definiciones de límite. Cada definición establece formalmente qué significa un determinado comportamiento. En este curso vamos a presentar las definiciones con rigor formal, pero en un lenguaje coloquial. Pueden buscar en los libros de la bibliografía una versión más técnica de estas definiciones, escritas con símbolos lógicos y matemáticos precisos.

Existencia del límite de $f(x)$ para $x \to x_0$

Comenzamos con la definición de existencia del límite lateral de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la izquierda:

Dada una función $f(x)$ definida al menos en un intervalo a la izquierda de x_0, de la forma $(x_0 - r, x_0)$, decimos que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

*si los valores de $f(x)$ se mantienen tan cerca de un valor fijo L como se quiera, bajo la condición de considerar $x < x_0$, y suficientemente cerca de x_0. Esta notación se lee "***el límite lateral de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la izquierda existe y es igual a L***".*
También podemos escribir

$$f(x) \to L \text{ cuando } x \to x_0^-$$

que se lee "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a x_0 por la izquierda*".*

Análogamente se define la existencia del límite lateral de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la derecha:

Dada una función $f(x)$ definida al menos en un intervalo a la derecha de x_0, de la forma $(x_0, x_0 + r)$, decimos que

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

si los valores de $f(x)$ se mantienen tan cerca de un valor fijo L como se quiera, bajo la condición de considerar $x > x_0$ y suficientemente cerca de x_0. Esta notación se lee **"el límite lateral de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la derecha existe y es igual a L"**.
También podemos escribir

$$f(x) \to L \text{ cuando } x \to x_0^+$$

que se lee "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a x_0 por la derecha".

Cuando consideramos el comportamiento de la función a ambos lados de x_0, sin distinción, se define la existencia del límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0:

Dada una función $f(x)$ definida al menos en un entorno reducido de x_0, de la forma $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$, decimos que

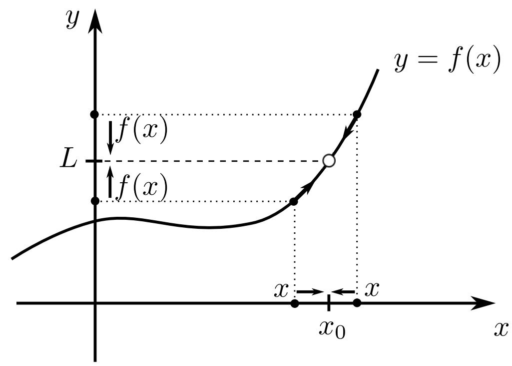
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

*si los valores de $f(x)$ se mantienen tan cerca de un valor fijo L como se quiera, bajo la condición de considerar la distancia $|x - x_0|$ suficientemente pequeña pero distinta de cero. Esta notación se lee "***el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 existe y es igual a L***".*
También podemos escribir

$$f(x) \to L \text{ cuando } x \to x_0$$

que se lee "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a x_0".

Conviene visualizar estas definiciones en una gráfica:



Gráficamente, si el límite existe y vale L significa que cuando x se acerca a x_0 en el eje horizontal, $f(x)$ se mantiene cerca L en el eje vertical. Es decir, los puntos $(x, f(x))$ se mueven sobre la gráfica manteniendo su altura cerca de L. El hecho de que $f(x)$ esté o no esté definida en x_0, no influye en este análisis.

EJEMPLO 2.1.2.1. Apliquemos estas definiciones a la función

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } x < 2 \\ -x^2+6, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

cuando $x \to 2$. Notemos que la función está definida a la izquierda y a la derecha de 2; eso nos permite explorar el límite por ambos lados.

Explorando por la izquierda de 2 tendremos valores de x menores que 2, por lo cual corresponde usar el primer renglón de la fórmula. Tomando valores de $x < 2$ y tan cercanos a 2 como sea necesario, sin llegar a tocarlo, encontramos que $f(x)$ se acerca a 1 tanto como quieran. El límite lateral por izquierda existe y vale

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$$

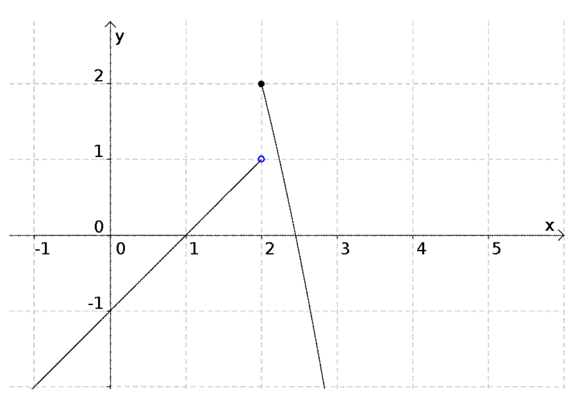
Explorando por la derecha de 2 tendremos valores de x mayores que 2, por lo cual corresponde usar el segundo renglón de la fórmula. Mirando valores de $x > 2$ y cercanos a 2 como sea necesario, sin llegar a tocarlo, encontramos que $f(x)$ se acerca a 2 tanto como quieran. El límite lateral por derecha existe y vale

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$$

Explorando por ambos lados a la vez, vemos que los límites laterales existen pero son distintos. En efecto, hay valores de x cercanos a 2 tales que $f(x)$ está cerca de 1 pero también hay valores de x cercanos a 2 tales que $f(x)$ está cerca de 2. Por lo tanto, mantener x cerca de 2 (sin distinguir de qué lado) no garantiza que $f(x)$ se mantenga cerca de un único valor L. Concluimos que

$$\text{no existe } \lim_{x \to 2} f(x)$$

Pueden visualizar estos resultados en la gráfica de $f(x)$,



Vale la pena insistir en que, en este ejemplo de límites, no usamos el valor de f en $x = 2$ en ningún momento; al explorar el límite para $x \to 2$ importan solamente los puntos **vecinos** a 2, y no importa si 2 está en el dominio de f, ni cuánto vale $f(2)$ en caso de que esté definido.

Propiedades

Hay una relación evidente entre el límite por ambos lados y los límites laterales, enunciada en la siguiente propiedad:

Dada una función $f(x)$ definida al menos en un entorno reducido de x_0, de la forma $(x_0-r, x_0)\cup(x_0,x_0+r)$, se verifica que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \textit{si y sólo si} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \text{ y } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

Es decir, **el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 existe si y solo si ambos límites laterales existen y son iguales***.*

En la práctica, si existe el $\lim_{x\to x_0} f(x)$ sabremos que existen y son iguales ambos límites laterales. Recíprocamente, si los límites laterales existen y son iguales sabremos que existe el $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Pero si uno de los límites laterales no existe, o si ambos existen pero son distintos, concluimos que no existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Otra propiedad importante es la llamada **unicidad del límite**:

Dada una función $f(x)$,

- *si existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$, su resultado es* **único**.

Esta propiedad asegura que, al explorar el límite de distintas maneras, siempre debemos llegar al mismo resultado.

Cuando el límite no existe: límites infinitos y comportamiento oscilante

Al discutir la noción de límite hemos visto casos en que los valores de una función $f(x)$, cuando $x \to x_0$, no se acercan a un determinado valor finito L. Se dice entonces que el límite no existe.

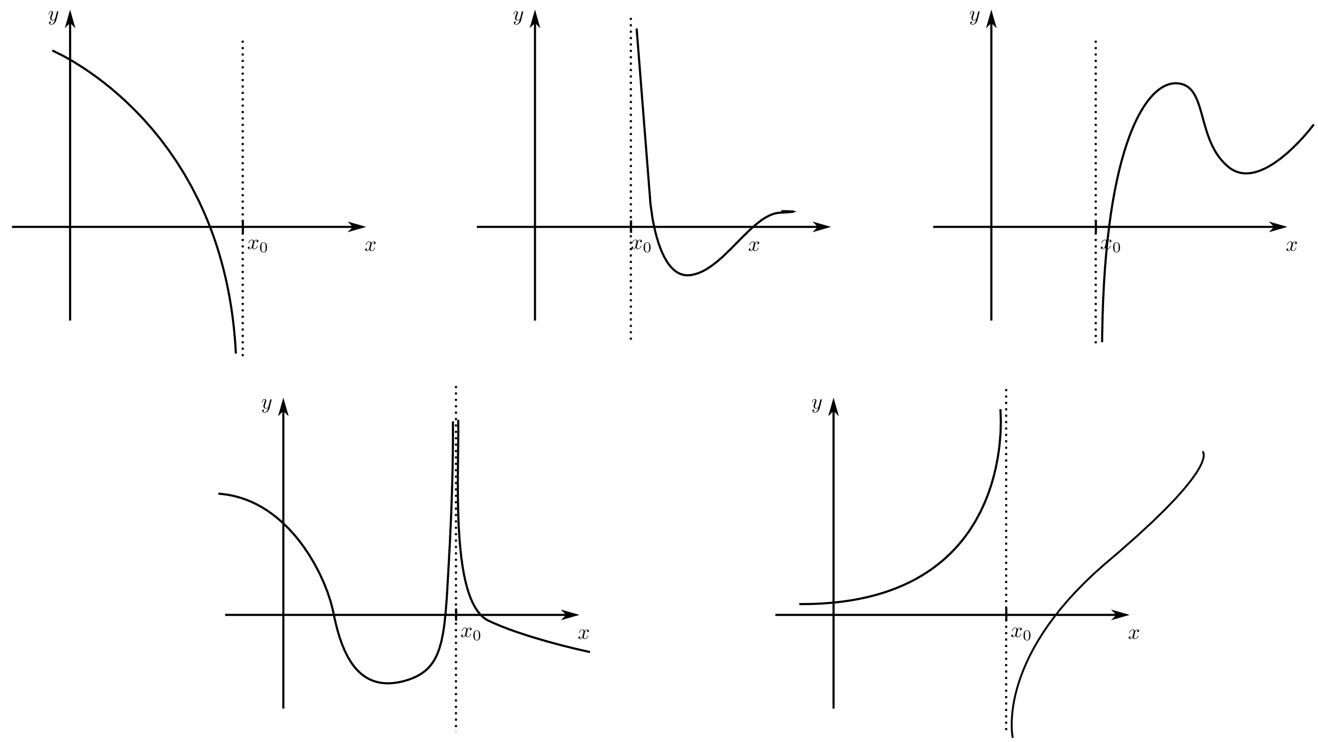
Aunque el límite de $f(x)$ no exista, en el sentido de límite finito en las definiciones dadas, podemos caracterizar el comportamiento de la función cerca de x_0, explicando por qué el límite no existe:

- Un motivo importante es que el valor absoluto de $f(x)$ se vuelva arbitrariamente grande cuando $x \to x_0$. En ese caso se dice que "**el límite no existe porque la función tiende a infinito**", o más brevemente que "**la función tiende a infinito**". Tenemos que distinguir si este comportamiento ocurre por la izquierda de x_0, por la derecha, o por ambos lados. También tenemos que distinguir si los valores de la función devienen grandes y positivos, o de valor absoluto grande y negativo.
- Otro motivo característico es que $f(x)$ vaya tomando distintos valores finitos, sin estabilizarse, cuando cuando $x \to x_0$.

Para organizar esta información tenemos definiciones apropiadas.

Límites infinitos

Las siguientes gráficas ilustran diversas situaciones de límites infinitos. Intenten describir en cada caso qué comportamientos reconocen cuando $x \to x_0$:



Para definir los distintos comportamientos observados, cada caso debe tratarse por separado.

Cuando la función tiende a valores grandes y positivos por la derecha de un número x_0, se define:

Dada una función $f(x)$ definida al menos en un intervalo a la derecha de x_0, de la forma $(x_0, x_0 + r)$, decimos que

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

si los valores de $f(x)$ se mantienen *positivos y tan grandes como se quiera, bajo la condición de considerar $x > x_0$ y suficientemente cerca de x_0. Esta notación se lee* "**el límite lateral de $f(x)$, cuando x tiende a x_0 por derecha, es $+\infty$**".
También podemos escribir

$$f(x) \to +\infty \text{ cuando } x \to x_0^+$$

que se lee "$f(x)$ tiende a más infinito cuando x tiende a x_0 por derecha".

Análogamente se define el límite por izquierda con resultado más infinito, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.

Cuando la función tiende a valores negativos de valor absoluto grande por la derecha de x_0, se define:

Dada una función $f(x)$ definida al menos en un intervalo a la derecha de x_0, de la forma $(x_0, x_0 + r)$, decimos que

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

si los valores de $f(x)$ se mantienen *negativos y con valor absoluto tan grande como se quiera, bajo la condición de considerar $x > x_0$ y suficientemente cerca de x_0. Esta notación se lee* "**el límite lateral de $f(x)$, cuando x tiende a x_0 por derecha, es $-\infty$**".
También podemos escribir

$$f(x) \to -\infty \text{ cuando } x \to x_0^+$$

que se lee "$f(x)$ tiende a menos infinito cuando x tiende a x_0 por derecha".

Análogamente se define límite por izquierda con resultado menos infinito, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

Asíntotas verticales

Cuando el límite de $f(x)$ para x tendiendo a x_0 (por derecha o por izquierda) da un resultado infinito, vemos que las gráficas tienden a ubicarse "verticalmente", acercándose indefinidamente a la recta vertical de ecuación $x = x_0$. Esta recta se llama **asíntota vertical** y resulta una guía visual para trazar la gráfica de la función, como se ve en las figuras anteriores. Observen que a veces este comportamiento puede darse de un solo lado de la gráfica (por izquierda o por derecha) y otras veces puede darse por ambos lados.

La recta $x = x_0$ se llama **asíntota vertical** *de la gráfica de $y = f(x)$ si*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \text{ o } -\infty \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \text{ o } -\infty$$

Siempre que encuentren una asíntota vertical conviene describir cuál es el comportamiento de cada lado: si se trata de una asíntota vertical por izquierda, por derecha o por ambos lados, y qué signo mantiene la función de cada lado. El lenguaje apropiado para esto es describir los límites laterales.

Límites oscilantes

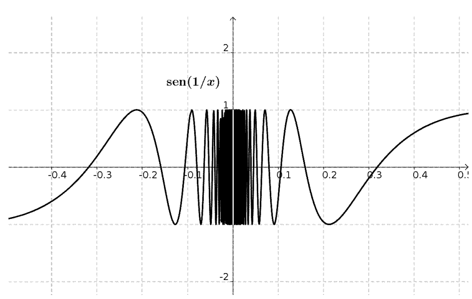
Además de límites finitos y de límites infinitos, hay otro comportamiento posible: cuando el límite de una función $f(x)$ para x tendiendo a x_0 **no es finito, y tampoco es infinito**, podemos concluir que cuando x está arbitrariamente cerca de x_0 la función aún toma *distintos valores finitos sin estabilizar su comportamiento*. En consecuencia, se dice que el límite de $f(x)$ para $x \to x_0$ **no existe porque la función oscila**.

Un ejemplo típico de este comportamiento es la función $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ alrededor de $x_0 = 0$.

EJEMPLO 2.1.2.2. Por medio de un gráfico de computadora, analicemos el comportamiento de la función compuesta

$$f(x) = \text{sen}\,(1/x)$$

Con GeoGebra verán lo siguiente



- ¿cuál es el dominio de esta función compuesta?
- cuando $x \to 0^+$, ¿observan un crecimiento arbitrario de $f(x)$? ¿y cuando $x \to 0^-$?
- cuando $x \to 0^+$, ¿observan que la función se estabilice cerca de algún valor finito? ¿y cuando $x \to 0^-$?
- ¿cómo describirían el comportamiento de la función cuando $x \to 0^+$? ¿y cuando $x \to 0^-$?
- además de la exploración gráfica, intenten ayudarse con una exploración numérica, construyendo una tabla de valores.
- intenten también una exploración analítica. Podrían preguntarse: ¿cómo se comporta $u = 1/x$ cuando $x \to 0^+$? Y luego, ¿cómo se comporta la función sen(u) en esa región de valores de u?

En una situación como esta, encontramos que no hay límite finito ni hay límite infinito. Se dice que el límite de $f(x)$ para $x \to 0$ no existe porque la función oscila entre distintos valores.

Actividades

Actividad 2.1.2.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes consignas:

- ¿Qué significa que una función $f(x)$ tenga una asíntota vertical de ecuación $x = -1$? Grafiquen distintas situaciones posibles, y describan en cada caso el comportamiento de la función a cada lado de la asíntota.
- Completen las definiciones de $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ (que no hemos detallado en el texto)..

Actividad 2.1.2.2. Analicen la existencia y el valor de los límites laterales de las siguientes funciones a partir de sus gráficas, que deberían reconocer a simple vista:

1. $|x|$ cuando $x \to 0$
2. $\dfrac{1}{x}$ cuando $x \to 0$
3. $\sqrt{x-2}$ cuando $x \to 2^+$
4. $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 2-t & \text{si } t \ge 1 \end{cases}$ cuando $t \to 0$ y cuando $t \to 4$

Calculen, si es posible, el valor de cada función en los puntos mencionados, y describan el comportamiento de la función a cada lado de esos puntos. Indiquen la presencia de asíntotas verticales.

Actividad 2.1.2.3. A partir de la gráfica de la función logaritmo natural, $\ln x$,
¿Cuál es el $\lim_{x \to 0^+} \ln x$?
¿Tiene sentido calcular $\lim_{x \to 0^-} \ln x$?
Grafiquen la asíntota vertical que posee la función logaritmo natural.

Actividad 2.1.2.4. Consideren la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, para estudiar su límite cuando $x \to 0^+$. Una exploración (gráfica, numérica, analítica) nos permite afirmar que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Sin embargo, realmente no hemos **calculado** este límite. Solo lo hemos intuido. ¿Cómo podemos asegurar que esta intuición es correcta? La manera rigurosa de hacerlo es **demostrar** que el límite es $+\infty$, controlando que se cumpla la definición correspondiente.

- ¿Cuál es la definición que caracteriza el comportamiento $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$?
- Les damos una guía para controlar que se cumpla:
  - En primer lugar, verifiquen que hay algún intervalo a la derecha de 0 donde la función está bien definida.
  - Ahora, vean que los valores de la función se mantienen tan grandes como se quiera en alguna región apropiada de valores de x a la derecha de 0:
    - si pretenden que $\dfrac{1}{x} > 100$, ¿qué tan cerca de 0 deben estar los valores de $x > 0$?
    - si pretenden que $\dfrac{1}{x} > 1000$, ¿qué tan cerca de 0 deben estar los valores de $x > 0$?
    - si proponen un valor bien grande de M positivo, y pretenden que $\dfrac{1}{x} > M$, ¿qué tan cerca de 0 deben estar los valores de $x > 0$?

- ¿encuentran una condición apropiada para los valores de x, que para *cualquier* valor de $M > 0$ asegure que $f(x) > M$?

Si lograron contestar la última pregunta, han probado formalmente que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

GeoGebra 2.1.2.5. Grafiquen con GeoGebra $f(x) = 20\exp(-10x^2)$. ¿Les parece que tiene una asíntota vertical en $x = 0$? ¿Qué pasa si cambian la escala para ver alturas mayores que $y = 20$?

Recuerden que hay que tener buen criterio antes de confiar ciegamente en los resultados obtenidos en computadora.

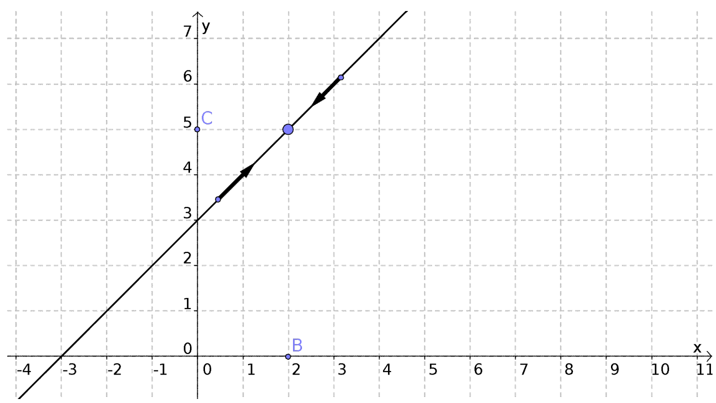
2.2 Reglas para el cálculo de límites

Contenidos de esta sección: puntos de continuidad. Límites de funciones construidas mediante operaciones entre funciones básicas. Reglas para operar con límites finitos. Reglas para operar con límites nulos e infinitos. Casos indeterminados. Algunos límites especiales.

2.2.1 Cuando los límites son evidentes: continuidad

La cuestión del límite de una función $f(x)$ para $x \to x_0$ aparece naturalmente cuando x_0 es un punto "difícil". Por ejemplo, un valor x_0 donde el denominador de un cociente se hace cero, o un punto donde una función definida a trozos cambia de fórmula. Sin embargo, podemos estudiar también puntos "fáciles", donde la función no presenta ningún obstáculo.

EJEMPLO 2.2.1.1. Consideremos la función lineal $f(x) = x+3$, definida en todo el eje real, y estudiemos sus límites para $x \to 2$.



Una exploración (gráfica, numérica, o analítica) de valores de x cercanos a $x_0 = 2$, sin tocarlo, nos indica que los valores de $f(x)$ se acercan a 5 : existen los límites tanto por izquierda como por derecha, y ambos valen 5. Luego,

$$\lim_{x\to 2}(x+3) = 5$$

Por otro lado, vemos que $x_0 = 2$ está en el dominio de la función. Se puede evaluar sin dificultad $f(2) = 2+3 = 5$. Observen que el valor del límite coincide con el valor de la función en el punto.

No es casualidad que el **límite de la función** exista cuando $x \to 2$, que también exista el **valor de la función** en $x = 2$ y que tengan el mismo resultado 5. En realidad, es lo que pasa con la mayoría de las funciones en los puntos "fáciles".

Es necesario insistir en que calcular el límite de una función para $x \to x_0$ y calcular el valor de la función $f(x_0)$ son dos conceptos totalmente distintos. Cuando estos dos conceptos distintos dan el mismo resultado, se dice que la función es **continua** en x_0.

Dada una función $f(x)$, definida al menos en un entorno de centro x_0, se dice que f es **continua** en x_0 *cuando*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Observemos que:

Cuando una función f es continua en x_0 se cumplen tres condiciones:

1) $f(x_0)$ **está definida**, es decir x_0 pertenece al dominio de la función,

2) $f(x)$ está definida también a ambos lados de x_0; se puede calcular, **existe y es finito** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,

3) **los resultados de evaluar el límite y de evaluar la función son iguales**.

Cuando falla alguna de estas tres condiciones, se dice que la función es **discontinua** en x_0 (o que tiene una discontinuidad en x_0).

Gráficamente, la continuidad de $f(x)$ en x_0 asegura que podemos unir el trazo de la gráfica viniendo por la izquierda de x_0 con el trazo viniendo por la derecha de x_0, justo donde se encuentra el punto $(x_0, f(x_0))$ que representa el valor de la función. Es decir, que el trazo de la gráfica no se interrumpe[2] al pasar por $(x_0, f(x_0))$.

En la práctica, **si sabemos de antemano que una función es continua** en un punto, nos podemos ahorrar el trabajo de calcular el límite: podemos usar la definición de continuidad para asegurar que el límite existe y calcularlo como el valor de la función en ese punto. Por eso es importante revisar las funciones básicas vistas en el Capítulo 1 y reconocer dónde son continuas. Mediante una exploración gráfica pueden convencerse de que todas las funciones vistas en general son continuas, excepto en los pocos puntos en que tienen obstáculos. Podemos hacer una lista:

- Las funciones potencias naturales (constante, identidad, cuadrática, cúbica, etc.) son continuas en cada punto de $(-\infty, +\infty)$.
- La función recíproca $f(x) = 1/x$ es continua en cada punto $(-\infty, 0)$ y en cada punto de $(0, +\infty)$. Es discontinua en $x = 0$.
- Las funciones seno y coseno son continuas en cada punto de $(-\infty, +\infty)$.
- Las funciones exponenciales (de cualquier base) son continuas en cada punto de $(-\infty, +\infty)$.
- Las funciones logaritmo (de cualquier base) son continuas en cada punto de $(0, +\infty)$.
- La función $\sqrt{x}$ es continua en $(0, +\infty)$.
  En $x = 0$ no se puede calcular el límite completo, solo por derecha: $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$. Además, $\sqrt{0} = 0$. Se dice que $\sqrt{x}$ es *continua por derecha en* $x = 0$.

Ejemplo 2.2.1.2. Sabiendo que $f(x) = x^3$ es una función continua en todo el eje real, podemos asegurar que

$$\lim_{x \to 2} x^3 = 2^3 = 8$$

Actividades

Actividad 2.2.1.1. Para fijar conceptos, elaboren la siguiente consigna:

- Grafiquen esquemáticamente una función continua y varias otras discontinuas en un punto x_0. Discutan qué condiciones de la definición de continuidad se cumplen o no se cumplen en cada caso.

Actividad 2.2.1.2. Discutan si $f(x) = x^2 + 2x - 3$ es continua en $x_0 = 1$. Busquen en el texto argumentos para sostener su opinión.

¿Qué sucederá en otros valores de x_0?

2.2.2 Reglas para operar con límites

Una vez que sabemos reconocer límites de funciones sencillas, podemos usarlos para calcular límites de funciones más elaboradas. Nos referimos a funciones escritas como sumas, restas, productos, cocientes y composición de funciones conocidas.

[2] De ahí viene la palabra "continuidad".

Al estudiar funciones construidas con dos o más funciones sencillas, necesitamos combinar el límite de cada expresión que interviene para entender el comportamiento de la función completa. Vamos a encontrar muchas situaciones distintas, por eso es importante conocer **reglas prácticas** para organizar la exploración de límites.

El cálculo de límites mediante reglas se elabora en tres etapas:

1. **Descomponer** la expresión de la función que se estudia en términos de operaciones entre funciones más sencillas.
2. **Reconocer** los límites de esas funciones sencillas. Si es necesario, descomponer cada expresión hasta que sea realmente sencilla.
3. **Aplicar las reglas** propiamente dichas.

Reglas algebraicas para operar con límites finitos

La siguiente lista enumera las primeras propiedades de los límites que serán de suma utilidad.

Si sabemos que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ ***existen y son finitos****, entonces se verifica que:*

1. *existe* $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. *existe* $\lim\limits_{x\to x_0} (kf(x)) = k \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *para cualquier constante* k
3. *existe* $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x).g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. *si* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, *existe* $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$

En cada caso, deben calcular primero los límites de $f(x)$ *y* $g(x)$ ***por separado****. Si existen y son finitos, la expresión de la derecha les dice cuál es el resultado de los límites planteados.*

Estas propiedades se pueden **demostrar**; para ello hay que asumir que $f(x)$ y $g(x)$ cumplen las condiciones enunciadas en la definición de límite, y a partir de ellas justificar que $f(x)+g(x)$, $kf(x)$, $f(x).g(x)$ y $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ también las cumplen. No lo haremos en este curso, les pedimos que las recuerden y que las utilicen cuando les parezca apropiado. Para recordarlas se suelen enunciar diciendo:

- "el límite de una suma es la suma de los límites, si ambos existen y son finitos"
- "el límite de una constante por una función es el producto de la constante por el límite de la función, si este último existe y es finito"
- "el límite de un producto es el producto de los límites, si ambos existen y son finitos"
- "el límite de un cociente es el cociente de los límites, cuando ambos existen y son finitos, y el límite del denominador no es cero"

Ejemplo 2.2.2.1. Sabemos que dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ cumplen que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$ y que $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 5$. Calculemos a partir de las reglas anteriores los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 2} (5f(x) - g(x))$:
   El límite $\lim_{x\to 2} 5f(x)$ existe por la regla 2, y vale $\lim_{x\to 2} 5f(x) = 5 \lim_{x\to 2} f(x) = 5\cdot 4 = 20$.
   El límite $\lim_{x\to 2} (5f(x) - g(x))$existe por la regla 1, y vale $\lim_{x\to 2} (5f(x) - g(x)) = \lim_{x\to 2} 5f(x) - \lim_{x\to 2} g(x) = 20 - 5 = 15$
2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{f(x)-2}$.
   Reconocemos que la expresión es un cociente. Calculemos primero el límite del denominador:

   $\lim\limits_{x\to 2} (f(x) - 2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) - 2 = 4 - 2 = 2$. Como el límite del numerador existe, y el límite del denominador existe y es distinto de cero, se puede utilizar la regla 4:

$$\lim_{x\to 2} \frac{g(x)}{f(x)-2} = \frac{\lim_{x\to 2} g(x)}{\lim_{x\to 2}(f(x)-2)} = \frac{5}{2}$$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{g(x)}{4-f(x)}$.
   Nuevamente reconocemos el límite de un cociente. Como $\lim\limits_{x\to 2}(4-f(x)) = 4 - \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4-4 = 0$, no puede utilizarse la regla del límite de un cociente. Explorando el comportamiento del numerador que tiende a 5 y del denominador que tiende a 0, ¿qué piensan que ocurre con este límite?

Observación: las reglas que hemos enunciado son válidas también para el cálculo de límites laterales, cuando $x \to x_0^-$ o $x \to x_0^+$.

Reglas para operar con límites de funciones compuestas

Muchas funciones se construyen como composición de funciones más sencillas, con la forma general $f(x) = g(u(x))$. Al estudiar un límite de una función de la forma $g(u(x))$ podemos explorar primero el comportamiento de la "función de adentro" $u(x)$ y luego el de la "función de afuera" $g(u)$.

EJEMPLO 2.2.2.2. Estudiemos el límite de la función $f(x) = \sqrt{x^2-5}$ cuando $x \to 3$.

Para descomponer $f(x)$ en términos de funciones sencilla llamamos $u(x) = x^2 - 5$ y $g(u) = \sqrt{u}$. Así podemos escribir $f(x)$ como una composición,

$$f(x) = g(u(x))$$

Para explorar el comportamiento de $g(u(x))$ podemos ver primero que

$$u(x) \to 4 \text{ cuando } x \to 3$$

porque $u(x) = x^2 - 5$ es continua en $x = 3$. Luego podemos ver que

$$g(u) \to 2 \text{ cuando } u \to 4$$

porque $g(u) = \sqrt{u}$ es continua en $u = 4$.

Finalmente intuimos que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} g(u(x)) = \lim_{u\to 4} g(u) = 2$$

Este ejemplo corresponde a una regla útil para calcular límites de funciones compuestas: **proponer una sustitución o un cambio de variables**. Sin embargo, la situación general tiene condiciones de aplicabilidad:

Dada una función compuesta $g(u(x))$, donde las funciones $g(u)$ y $u(x)$ verifican que $\mathbf{Im}\, u \subset \mathbf{Dom}\, g$, si

1. *existe el $\lim_{x\to x_0} u(x) = u_0$ y*
2. *existe $\lim_{u\to u_0} g(u)$*
3. *o bien $g(u)$ es continua en el punto $u = u_0$ (es decir, existe $\lim_{u\to u_0} g(u) = g(u_0)$), o bien $u(x)$ se mantiene distinto de u_0 cuando x se acerca a x_0 (de forma tal que en el proceso de tomar el límite $x \to x_0$ nunca será necesario evaluar $g(u_0)$),*

entonces **existe el límite de la función compuesta** *y vale*

$$\lim_{x\to x_0} g(u(x)) = \lim_{u\to u_0} g(u)$$

La sutileza que hace necesaria la tercer condición es que, cuando x se acerca a x_0, podría ser que $u(x)$ tome efectivamente el valor límite u_0: en ese caso, sabiendo por la condición 2 que $\lim_{u\to u_0} g(u)$ existe, no podemos anticipar nada del valor de $g(u_0)$. Como enuncia el punto 3 de la regla, hay dos situaciones que sí permiten evaluar $\lim_{x\to x_0} g(u(x))$:

- en el caso que $g(u)$ sea continua en u_0 podemos garantizar que existe $g(u_0)$ y coincide con $\lim_{u\to u_0} g(u)$, por lo que el límite se puede explorar sin problemas (incluso si eventualmente $u(x)$ toma el valor u_0).
- en los casos en que exista $\lim_{u\to u_0} g(u)$ pero $g(u)$ no sea continua en u_0 (discontinuidad evitable) debemos controlar que $u(x)$ no tome el valor límite u_0 mientras $x \to x_0$, para evitar toda referencia a $g(u_0)$.

Si no se cumple ninguna de las opciones del punto 3, esta regla de sustitución o cambio de variables no es segura.

Cantidades infinitesimales

Las expresiones matemáticas que dependen de una variable x y que tienden a cero cuando su variable tiende a un valor dado $x \to x_0$ aparecen con mucha frecuencia en los modelos matemáticos de la Naturaleza, sobre todo cuando se intenta describir cambios pequeños en un sistema de interés. Se las llama **cantidades infinitesimales,** o **infinitésimos**. Copiando la definición de límite, decimos que $f(x)$ es una cantidad infinitesimal cuando $x \to x_0$ si

> *$f(x)$ está tan cerca de 0 como se quiera, bajo la condición de considerar x suficientemente cerca de x_0*

En otras palabras, decimos que $f(x)$ es una cantidad infinitesimal cuando $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Reglas para límites "tipo 1 sobre 0"

Cuando estudiamos el límite de un cociente, y encontramos que el denominador es infinitesimal (es decir que tiende a cero), no podemos usar la regla algebraica del cociente. Vamos a discutir ahora el caso en que el numerador tienda a un límite finito distinto de cero y el denominador tienda a cero (que se suele recordar como límite **"tipo** 1 **sobre** 0**"**).

Cuando analizamos un límite de la forma

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

y vemos que el numerador tiende a un límite finito distinto de cero y el denominador tiende a cero, podemos asegurar que **el límite del cociente no existe porque tiende a infinito** (se trata cierta cantidad no nula dividida por algo arbitrariamente pequeño).

Recomendamos entonces analizar los límites laterales, para decidir en cada lado si el límite del cociente es $+\infty$ o $-\infty$. El numerador usualmente es una función continua en x_0 y mantiene el mismo signo desde ambos lados, pero el denominador que tiende a cero puede tomar valores positivos o negativos según el lado que se mire. El signo del cociente, mientras $x \to x_0$, se obtiene aplicando de la regla de signos de la división.

EJEMPLO 2.2.2.3. Estudiemos el límite

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3}{x-3}$$

Primero analizamos el numerador y el denominador por separado: el numerador tiende a 27 (porque x^3 es una función continua en $x_0 = 3$), por lo que se mantiene positivo cuando $x \to 3$, en tanto que el denominador tiende a 0 (porque $x - 3$ es una función continua en $x_0 = 3$) y en consecuencia su signo podría ser positivo o negativo. En efecto, según x tienda a 3 por izquierda o por derecha, el denominador $x - 3$ se acerca a cero con distinto signo:

$$\text{cuando } x \to 3^-, \text{ la condición } x < 3 \text{ implica } x - 3 < 0$$

cuando $x \to 3^+$, la condición $x > 3$ implica $x - 3 > 0$

Entonces, $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{x^3}{x-3} = -\infty$ y $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{x^3}{x-3} = +\infty$. Gráficamente, la función presenta una asíntota vertical en $x_0 = 3$.

Reglas para operar con límites infinitos

Cuando analizamos el límite de una suma, o de un producto, o de un cociente, es posible que alguna de las funciones involucradas tienda a infinito. Debe quedar claro que infinito no es un número, sino un símbolo para indicar un comportamiento: **no se puede operar con infinitos como si fueran números**.

Lo que sí vamos a hacer es analizar el límite de una función cuando alguna(s) de las expresiones que intervienen en su fórmula tiende a infinito. En algunos casos el límite es evidente, y en otros casos no lo es. Veamos una breve lista de los casos evidentes:

Sumas y restas

- si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$ finito, entonces $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$
- si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, entonces $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$

Productos

- si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$ finito y no nulo, entonces $\lim_{x\to x_0} (f(x)\, g(x)) = \pm\infty$, dependiendo del signo de L.
- si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, entonces $\lim_{x\to x_0} (f(x)\, g(x)) = \pm\infty$, dependiendo del signo de cada función.

Cocientes

- si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$ finito y no nulo, entonces $\lim_{x\to x_0} (f(x)/g(x)) = \pm\infty$, dependiendo del signo de L.
- si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, entonces $\lim_{x\to x_0} (f(x)/g(x)) = 0$.
- si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to x_0} (f(x)/g(x)) = \pm\infty$, dependiendo del signo de cada función.

Actividades

Actividad 2.2.2.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes preguntas:

- ¿Qué reglas recuerdan para operar con límites finitos? Den un ejemplo donde aplicar cada una.
- ¿Qué reglas recuerdan para analizar cocientes, cuando el denominador tiende a cero? Den un ejemplo de cada caso que reconozcan.
- ¿Qué reglas recuerdan para operar con límites infinitos? Den algunos ejemplos.

Actividad 2.2.2.2. Analicen los siguientes límites, detallando las reglas empleadas:

$a)\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+3-x}{x^2-1};\quad b)\ \lim\limits_{x\to 3^+} \sqrt{x^2-9};\quad c)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+5}{x^3-x};\quad d)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-x}{x+5}$

Actividad 2.2.2.3. Analicen los siguientes límites, detallando las reglas empleadas:

$a)\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x};\quad b)\ \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \ln x\right)$

2.2.3 Cuando las reglas no alcanzan: límites indeterminados

Todavía quedan casos que no están cubiertos por las reglas que mencionamos. Se trata de situaciones en las intervienen infinitos, o divisores que tienden a cero, donde **no alcanza conocer el límite de cada expresión** que interviene para asegurar el comportamiento de la expresión completa.

Ejemplo 2.2.3.1. Por ejemplo, si analizamos

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x$$

- ¿Cómo se comporta cada factor?
- ¿Resulta evidente el comportamiento del producto cuando $x \to 0^+$? ¿Qué podría pasar al multiplicar un número de valor absoluto muy pequeño por otro de valor absoluto muy grande?

Cuando analizamos el límite de una función construida con expresiones más sencillas, y luego de reconocer el límite de cada expresión sencilla todavía no podemos intuir el límite de la función completa, se dice que tenemos un **límite indeterminado**. Conviene discutirlos caso por caso.

Límites "tipo 0 sobre 0"

En los modelos aplicados es frecuente considerar cocientes de cantidades infinitesimales (que tienden a cero). Por ejemplo, al comprimir un gas, para definir la compresibilidad se calcula la razón o cociente entre un cambio infinitesimal de volumen y el correspondiente cambio infinitesimal de presión.

Llamamos límite "**tipo** 0 **sobre** 0" al límite de un cociente

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde tanto el numerador como el denominador son infinitesimales cuando nos acercamos a x_0. Para explorar los valores que toma el cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es necesario **comparar** las cantidades infinitesimales$f(x)$ con $g(x)$: podría suceder que:

- sean relativamente igual de pequeñas y el cociente se mantenga estable
- $f(x)$ sea relativamente mucho más pequeña que $g(x)$ y el cociente tienda a cero
- $g(x)$ sea relativamente mucho más pequeña que $f(x)$ y el cociente tienda a infinito

En consecuencia, saber que un límite es del "tipo 0 sobre 0" **no alcanza** para determinar la existencia del límite, ni su valor. Por esto se dice que es un **límite indeterminado**.

En la práctica, cuando un límite es indeterminado, hay que tratar de reescribir la fórmula de la función para llegar a otra expresión que no sea indeterminada. Así, aprovechando que x está tan cerca de x_0 como se quiera, pero sin ser nunca x_0, intentamos manipular algebraicamente la expresión para transformarla en otra donde sí podamos utilizar las reglas algebraicas. Si se logra, se dice que **se salva la indeterminación**, y se resuelve el límite con las reglas adecuadas.

Ejemplo 2.2.3.2. Analicemos primero

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Vemos que $x^2 - 1 \to 0$ y también $x - 1 \to 0$ cuando $x \to 1$, es decir que el límite es indeterminado del "tipo 0 sobre 0". Podemos simplificar

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = x + 1 \text{ (siempre que } x \neq 1)$$

Como al estudiar el límite nos interesa precisamente $x \neq 1$, podemos asegurar que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1)$$

que se resuelve sencillamente usando que $x - 1$ es una función continua en $x_0 = 1$. El resultado es

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

EJEMPLO 2.2.3.3. Como segundo ejemplo, veamos una situación similar pero con resultado muy distinto:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

Nuevamente vemos que el numerador y el denominador tienden a 0 cuando $x \to 1$, es decir que el límite también es indeterminado del "tipo 0 sobre 0". Factoreando y simplificando obtenemos

$$\frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x - 1)}{(x - 1)(x - 1)} = \frac{1}{x - 1} \text{ (siempre que } x \neq 1)$$

Con la forma simplificada descubrimos que se trata un límite infinito, del "tipo 1 sobre 0". Corresponde analizar los límites laterales para concluir que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x - 1} = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x - 1} = +\infty$$

Vale la pena insistir en que los límites del "tipo 0 sobre 0" pueden dar distintos resultados, precisamente por eso se llaman indeterminados. Para resolverlos hay que seguir trabajando hasta salvar la indeterminación.

Para simplificar cocientes serán útiles todas las operaciones algebraicas que hayan aprendido en el colegio: factorear, simplificar, sacar denominador común, racionalizar denominadores, etc. Si les resulta necesario un repaso, pueden pedir material adecuado y consultar todas sus dudas en clase.

Orden relativo de cantidades infinitesimales

Al resolver un límite del "tipo 0 sobre 0" uno determina si la pequeñez del numerador o la pequeñez del denominador es más importante en el cálculo del cociente. Esto permite definir un orden de importancia relativa entre dos cantidades infinitesimales.

Cuando dos infinitésimos $f(x)$ y $g(x)$ en x_0 cumplen que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

se dice que $f(x)$ es un **infinitésimo de mayor orden** que $g(x)$. Se interpreta que, aunque $f(x)$ y $g(x)$ tiendan a cero, la cantidad $f(x)$ resulta relativamente mucho más pequeña que $g(x)$ cuando $x \to x_0$.

En cambio, cuando dos infinitésimos $f(x)$ y $g(x)$ en x_0 cumplen que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

siendo L un número finito distinto de cero, se dice que $f(x)$ y $g(x)$ son **infinitésimos del mismo orden**. Se interpreta que, mientras $f(x)$ y $g(x)$ tienden a cero, la cantidad $f(x)$ se mantiene aproximadamente proporcional a $g(x)$ cuando $x \to x_0$. En particular, si $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = 1$ se suele decir que $f(x)$ y $g(x)$ son **infinitésimos equivalentes.**

Por último, cuando dos infinitésimos $f(x)$ y $g(x)$ en x_0 cumplen que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

se dice que $f(x)$ es un **infinitésimo de menor orden** que $g(x)$. Se interpreta que, aunque $f(x)$ y $g(x)$ tiendan a cero, la cantidad $f(x)$ resulta relativamente mucho más grande que $g(x)$ cuando $x \to x_0$.

EJEMPLO 2.2.3.4. La expresión x^2 es un infinitésimo de mayor orden que la expresión x, cuando $x \to 0$. Grafiquen ambas expresiones en un entorno de $x_0 = 0$ para apreciar la relación entre ellas.

Los polinomios $p(x) = x - 2$, $q(x) = x^2 - 4x + 4$ y $r(x) = x^2 + 2x - 8$ son cantidades infinitesimales cuando $x \to 2$. Justifiquen que $p(x)$ y $r(x)$ son infinitésimos del mismo orden, mientras que $q(x)$ es un infinitésimo de mayor orden que $p(x)$ y $r(x)$.

Límites indeterminados que involucran infinitos

Otros casos de límites indeterminados frecuentes son los siguientes:

- si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, entonces $\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x))$ no se puede anticipar.

Se trata de un caso indeterminado, conocido como "tipo ∞ menos ∞". Se recomienda operar para reescribir la resta, antes de calcular el límite. Intuitivamente, el resultado depende de cuál infinito tiene más "peso" en la resta.

- si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to x_0} (f(x)\, g(x))$ no se puede anticipar.

Se trata de un caso indeterminado, conocido como "tipo 0 por ∞". Se recomienda operar para reescribir el producto, antes de calcular el límite. Intuitivamente, el resultado depende de si es más "importante" el infinito o el cero.

- si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, entonces $\lim_{x\to x_0} (f(x)/g(x))$ no se puede anticipar.

Se trata de un caso indeterminado, del "tipo ∞ sobre ∞". Se recomienda operar para reescribir el cociente, antes de calcular el límite. Intuitivamente, el resultado depende de si es más "importante" el infinito del numerador o del denominador.

EJEMPLO 2.2.3.5.

- Consideren las funciones $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/x^2$. Aplicando reglas anteriores podemos ver que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ y que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$. Para calcular $\lim_{x\to 0^+} (f(x) - g(x))$, del "tipo $\infty - \infty$", debemos primero trabajar la resta:
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$
y luego analizar el límite del cociente obtenido. Como el numerador tiende a -1 y el denominador tiende a 0^+, concluimos en este caso que
$$\lim_{x\to 0^+} (f(x) - g(x)) = -\infty$$
- Consideren ahora las funciones $g(x) = 1/x^2$ y $h(x) = \frac{1-2x^2}{x^2}$. Ambas tienden a $+\infty$ cuando $x \to 0$, por lo que $\lim_{x\to 0} (g(x) - h(x))$ también es indeterminado del "tipo $\infty - \infty$". Para analizarlo trabajamos la resta:
$$\frac{1}{x^2} - \frac{1-2x^2}{x^2} = \frac{1-1+2x^2}{x^2} = 2$$
cuando $x \neq 0$, por lo que en este caso
$$\lim_{x\to 0} (g(x) - h(x)) = 2$$
existe y es finito.

Actividades

ACTIVIDAD 2.2.3.1. Para fijar conceptos, elaboren la siguiente pregunta:

- ¿Qué tipos de límites indeterminados conocen? Busquen un ejemplo de cada tipo, con funciones sencillas. ¿Por qué son indeterminados?

ACTIVIDAD 2.2.3.2. Por medio de exploración numérica y analítica analicen el comportamiento de

a) $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ cuando $x \to 2$

b) $\dfrac{x-2}{x^2-4}$ cuando $x \to 2$

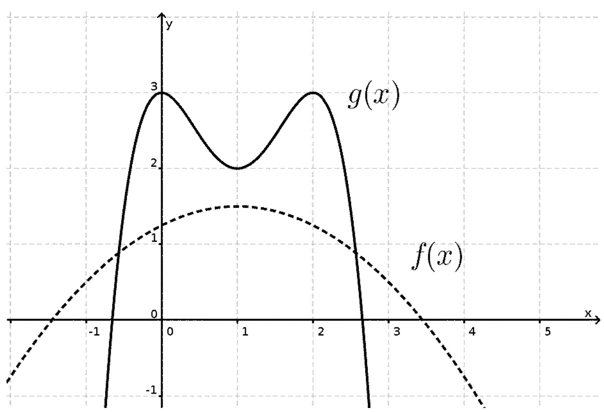
Describan en un gráfico esquemático el comportamiento hallado a ambos lados del punto estudiado. En base al análisis realizado, ¿alguna de estas funciones posee alguna asíntota vertical?

ACTIVIDAD 2.2.3.3. Las expresiones x^2 y $\sqrt{x}$ son infinitesimales cuando $x \to 0^+$. Determinen el orden relativo de estos infinitésimos.

Grafiquen cada expresión e intenten justificar gráficamente su respuesta.

2.2.4 Desigualdades y regla de compresión

Cuando dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ mantienen una relación de desigualdad alrededor de un punto x_0 de sus dominios podemos estudiar qué ocurre con sus límites. Veamos la situación en un gráfico:



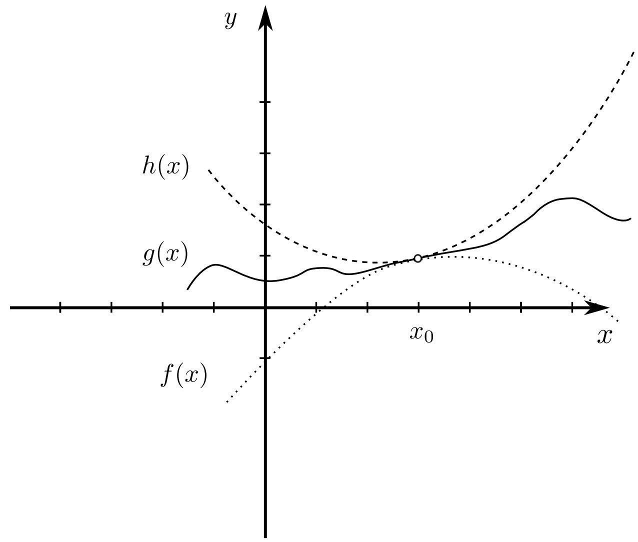
Alrededor de $x_0 = 1$, hasta cierta distancia, se observa que $f(x) \leq g(x)$. También se observa que existen los límites $\lim_{x\to 1} f(x)$ y $\lim_{x\to 1} g(x)$. En esta situación es de esperar que la desigualdad se mantenga en el límite, es decir que $\lim_{x\to 1} f(x) \leq \lim_{x\to 1} g(x)$.

Esta observación se formaliza con la siguiente propiedad:

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas alrededor de x_0 (es decir, en un conjunto de la forma $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$),
si $f(x) \leq g(x)$ alrededor de x_0 y los límites de f y g existen cuando $x \to x_0$, entonces

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Una situación interesante se da cuando una función $g(x)$ queda "atrapada" entre otras dos funciones $f(x)$ y $h(x)$, como en el siguiente gráfico



Si $h(x)$ y $f(x)$ tienen el mismo límite cuando $x \to x_0$, es de esperar que para la función atrapada exista el límite y sea igual al de $h(x)$ y $f(x)$. Esta propiedad se formaliza como

> **Regla de compresión**
>
> *Dadas tres funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ definidas alrededor de x_0 (es decir, en un conjunto de la forma $(x_0-r, x_0) \cup (x_0, x_0+r)$), si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ alrededor de x_0 y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$, entonces* **existe el límite de** $g(x)$ *y vale*
>
> $$\lim_{x\to x_0} g(x) = L$$

La regla de compresión resulta útil cuando no conocemos el límite de cierta función $g(x)$ pero sí tenemos la información de los límites de dos funciones que la "comprimen" por debajo y por encima.

Ejemplo 2.2.4.1. A pesar de que el $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe, como vimos en el ejemplo 2.1.2.2, podemos calcular

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \operatorname{sen}(1/x)$$

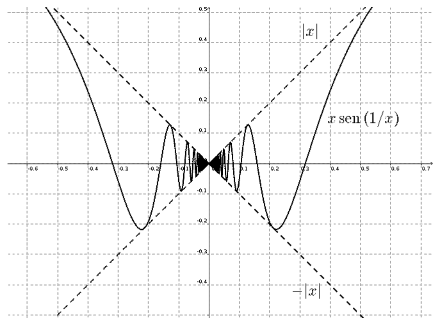
aplicando la regla de compresión. Para eso notemos que para todo $x \neq 0$, siendo $1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq 1$, se cumple que

$$-|x| \leq x \cdot \operatorname{sen}(1/x) \leq |x|$$

Como $\lim_{x\to 0} (-|x|) = \lim_{x\to 0} |x| = 0$, la regla permite concluir que existe

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \operatorname{sen}(1/x) = 0$$

En un gráfico podemos apreciar cómo los valores de $x \cdot \operatorname{sen}(1/x)$ quedan atrapados entre las gráficas de $-|x|$ y $|x|$:



Actividades

ACTIVIDAD 2.2.4.1. Para fijar conceptos, elaboren la siguiente pregunta:

- ¿Qué afirma la regla de compresión? Propongan algún ejemplo donde sea útil.

2.2.5 Dos límites indeterminados especiales: $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$ y $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

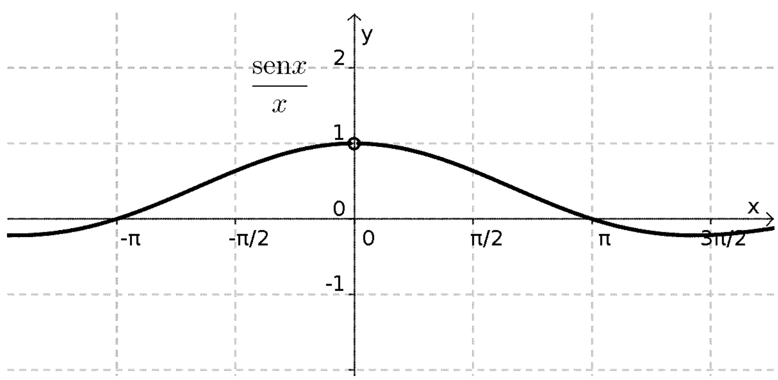
Hay casos de límites indeterminados del tipo "0 sobre 0" que no se pueden salvar mediante manipulación algebraica, porque involucran funciones trascendentes (como las que llamamos funciones especiales en el capítulo 1), pero que se pueden resolver con métodos más elaborados.

En primer lugar vamos a analizar el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$$

Se trata de un límite indeterminado del tipo "0 sobre 0", porque sen$x$ es una cantidad infinitesimal cuando $x \to 0$. En este caso no hay manera de factorizar sen$x$ para intentar una simplificación.

Dado que no es sencillo hacer una exploración analítica, conviene hacer una gráfica cuidadosa de senx/x alrededor de $x_0 = 0$. Con ayuda de GeoGebra obtendrán una gráfica como esta:



Se observa que la función no está definida en $x_0 = 0$, y que mantiene valores arbitrariamente cercanos a 1 cuando x se acerca a x_0. A este nivel gráfico, encontramos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Este límite se puede obtener en forma gráfica/analítica usando la regla de compresión: en la circunferencia trigonométrica, grafiquen x, sen x y $\tan x$ para x pequeño y en el primer cuadrante. Comprueben geométricamente que sen $x \leq x \leq \tan x$.

Invirtiendo la desigualdad anterior, se demuestra que, para $x > 0$, $\dfrac{\cos x}{\text{sen } x} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\text{sen } x}$.

Multiplicando todos los términos por sen $x > 0$ se verifica que $\cos x \leq \dfrac{\text{sen } x}{x} \leq 1$.

Aplicando la regla de compresión se puede concluir que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$.

Por otro lado, observando que $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x}$ es una función par, se puede concluir que también por izquierda $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$.

Recuerden a partir de este análisis que

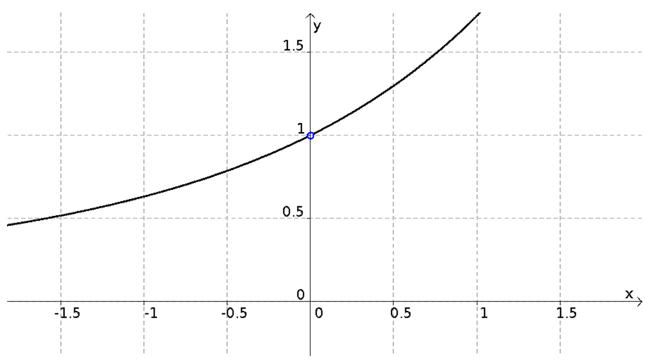
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathit{sen}x}{x} = 1$$

En segundo lugar vamos a discutir

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Nuevamente encontramos un límite indeterminado del tipo "0 sobre 0", porque $e^x \to 1$ cuando $x \to 0$ y la resta $e^x - 1$ resulta una cantidad infinitesimal. Tampoco aquí hay manera de factorizar el numerador para intentar simplificar.

Dado que no es sencillo hacer una exploración analítica, conviene hacer una gráfica cuidadosa de $(e^x - 1)/x$ alrededor de $x_0 = 0$. Con ayuda de GeoGebra obtendrán una gráfica como esta:



Se observa que la función no está definida en $x_0 = 0$, pero que mantiene valores arbitrariamente cercanos a 1 cuando x se acerca a 0. A nivel gráfico, encontramos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Recuerden a partir de este análisis gráfico que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Actividades

Actividad 2.2.5.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes preguntas:

- ¿Por qué el $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es indeterminado? ¿Por qué no es sencillo salvar la indeterminación?

Actividad 2.2.5.2. Usando que $\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u}$, calculen

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x^2}$
2. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\text{sen}(x)}{\pi - x}$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(3x)}{x}$

GeoGebra 2.2.5.3. Comprueben que x, x^2, $\sqrt{x}$ y sen x son cantidades infinitesimales cuando $x \to 0$ (es decir, tienden a cero cuando $x \to 0$)

Analicen gráficamente si existen, y en ese caso cúanto valen, los límites para $x \to 0$ de los siguientes cocientes:

$$\frac{\text{sen}\, x}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\text{sen}\, x}{x}, \quad \frac{\text{sen}\, x}{x^2}$$

Para ello, grafiquen las funciones de numerador y denominador cerca de $x = 0$ e interpreten el resultado del límite del cociente.

2.3 Continuidad y discontinuidades. Teorema del Valor Intermedio

Contenidos de esta sección: reconocimiento de funciones continuas. Clasificación de discontinuidades. Continuidad en intervalos. Propiedades de funciones continuas en intervalos cerrados.

Los modelos matemáticos de la Naturaleza generalmente presuponen que cada variable depende de las otras en forma continua: en cada punto las cantidades están bien definidas, y si cambiamos muy poco una variable, van a cambiar muy poco las cantidades asociadas. Por ejemplo, se da por hecho que la posición y la velocidad de un vehículo varían en forma continua con el tiempo. El volumen de una esfera, cuya fórmula es $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, varía continuamente con su radio. Pero también se presentan discontinuidades en situaciones de la vida real, como por ejemplo en pulsos de corrientes eléctricas o en el electrocardiograma de una persona en el instante en que sufre un paro cardíaco.

En todo caso, es tan importante reconocer dónde una función es continua como saber distinguir y clasificar las posibles discontinuidades.

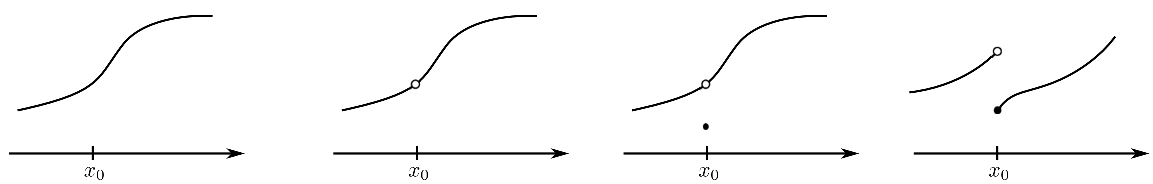
2.3.1 Continuidad en un punto

En la sección 2.2 presentamos la noción de **continuidad en un punto**: una función $f(x)$ es continua en un punto x_0 si cumple tres condiciones:

1. $f(x_0)$ está definida, es decir x_0 pertenece al dominio de la función,
2. $f(x)$ está definida también en algún entorno de x_0, se puede calcular, existe y es finito $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,
3. los resultados de evaluar el límite y de evaluar la función son iguales.

Cuando no ocurre alguna de estas tres condiciones, se dice que la función es **discontinua** (o que tiene una discontinuidad) en x_0. Repasemos el concepto en un ejemplo.

Ejemplo 2.3.1.1. Consideremos las funciones graficadas como



Encontramos cuatro situaciones diferentes. En el primer caso, el trazo de la gráfica puede seguirse sin necesidad de levantar el lápiz del papel. En términos de límites, cuando la variable independiente x se acerca a x_0, por ambos lados, vemos que la función $f(x)$ tiende a $f(x_0)$. En los otros casos, por algún motivo hay que levantar el lápiz del papel al pasar por $x = x_0$.

1. El primer caso corresponde a una función continua en $x = x_0$; la función cumple con las tres condiciones de continuidad. Analicemos por qué motivo las restantes no son continuas en el punto x_0.
2. En la segunda gráfica, la función no está definida en x_0; luego no puede ser continua allí. Observemos, sin embargo, que el límite cuando $x \to x_0$ existe.
3. La gráfica que figura en tercer lugar es similar a la anterior; la diferencia es que ahora la función está definida en x_0, pero $f(x_0)$ no coincide con el límite cuando $x \to x_0$. Por eso la función no es continua en x_0.
4. Finalmente, en el último gráfico no existe el límite cuando $x \to x_0$; los límites laterales existen pero son distintos entre sí. La función resulta discontinua en x_0, independientemente de cómo esté definida $f(x_0)$.

Para analizar la continuidad en un punto es necesario calcular límites, donde tendrán que aplicar una y otra vez las reglas algebraicas y la regla de composición aprendidas en la sección 2.2 Como una consecuencia directa de las propiedades ya vistas para límites, resulta conveniente enunciar las propiedades básicas de la continuidad:

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en un punto x_0,

- $f(x) + g(x)$ *es continua en* x_0
- $c\,f(x)$ *es continua en* x_0 *para cualquier constante* c
- $f(x)g(x)$ *es continua en* x_0
- *si* $g(x_0) \neq 0$, $f(x)/g(x)$ *es continua en* x_0

Si $u(x)$ es una función continua en x_0, y $g(u)$ es otra función continua en $u_0 = u(x_0)$,

- $(g \circ u)(x) = g(u(x))$ *es continua en* x_0

EJEMPLO 2.3.1.2. Usando estas propiedades podemos asegurar, por ejemplo, que la función compuesta

$$f(x) = \cos\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

es continua en todo punto, excepto en $x = 1$. La justificación es la siguiente: $x+1$ y $x-1$ son continuas en todo el eje real por ser polinomios; $u(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ es continua en todo punto por ser cociente de funciones continuas, excepto en $x = 1$ donde el denominador se anula; finalmente, $f(x)$ es la composición de $u(x)$, que tiene una sola discontinuidad en $x = 1$, con $g(u) = \cos u$ que es continua para todo valor de u. Luego $f(x)$ es continua en todo punto, excepto en $x = 1$.

Continuidad lateral

Cuando no podemos tomar el límite de una función por ambos lados de un dado punto, o cuando podemos pero los límites laterales son distintos, aún es posible analizar separadamente la continuidad por izquierda o por derecha. Por ejemplo, podemos preguntarnos si la función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua por derecha en $x_0 = 0$. En estos casos se habla de **continuidad lateral**.

Se dice que una función $f(x)$ definida al menos en un intervalo $(x_0 - r, x_0]$ es **continua en x_0 por izquierda** *si*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Se dice que una función $f(x)$ definida al menos en un intervalo $[x_0, x_0 + r)$ es **continua en x_0 por derecha** *si*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

EJEMPLO 2.3.1.3. Estudiemos la continuidad en $x_0 = 0$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } x \leq 0 \\ 2 - x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Necesitamos conocer los límites laterales

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x^2 + 1\right) = 1$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (2 - x) = 2$$

Como encontramos que estos límites laterales son diferentes, no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ y por lo tanto f es discontinua en 0.

Por otro lado, evaluamos la función en $x_0 = 0$ y obtenemos $f(0) = 1$. Como encontramos que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, concluimos que f es continua en 0 por izquierda. Y siendo $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2 \neq f(0)$, vemos que f no es continua en 0 por derecha.

Construyan la gráfica de $f(x)$ para visualizar estos resultados.

Actividades

Actividad 2.3.1.1. Para fijar conceptos, respondan las siguientes preguntas:

- ¿Qué reglas pueden usar para reconocer si una función es continua en un punto?
- Si $f(x)$ es continua en $x_0 = 2$ y $\lim_{x\to 2} [f(x) + 1] = 5$, ¿cuánto vale $f(2)$?
  ¿Qué resultados teóricos utilizaron para responder?

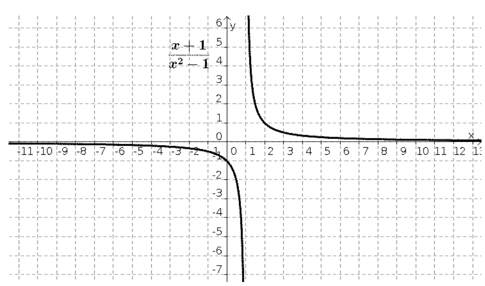
Actividad 2.3.1.2. Usando las propiedades enunciadas **demuestren** que un polinomio es una función continua en todos los puntos x_0 del eje real.

Actividad 2.3.1.3. Determinen si la función $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ es lateralmente continua en los bordes de su dominio.

2.3.2 Clasificación de discontinuidades

La falla de alguna de las tres condiciones que definen la continuidad en un punto determina la **discontinuidad** de la función en dicho punto. Conviene clasificar las discontinuidades según cuál (o cuáles) de las condiciones no se cumpla, y reconocer las características de la gráfica de la función de cada caso.

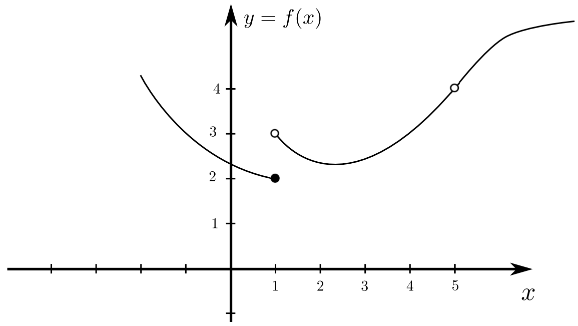
- Si una función $f(x)$ tiene al menos un límite lateral infinito cuando x tiende a x_0, se dice que tiene una **discontinuidad infinita** (tipo **asíntota vertical**). La gráfica presenta una asíntota vertical con ecuación $x = x_0$.



- Si una función $f(x)$ tiene límites laterales finitos cuando x tiende a x_0, con valores distintos según $x \to x_0^-$ o $x \to x_0^+$, se dice que la función tiene una **discontinuidad finita** (tipo **salto**). El salto en la gráfica es un incremento repentino del valor de la función al pasar de la izquierda a la derecha de la discontinuidad; la magnitud del salto se calcula restando

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

  En la gráfica de la figura siguiente se observa un salto de valor 1 en $x_0 = 1$.



- Si la función $f(x)$ tiene límite finito cuando x tiende a x_0 (es decir, tiene el mismo límite por cada lado), se dice que tiene una **discontinuidad evitable**. La razón de la discontinuidad puede ser que el valor $f(x_0)$ no esté definido, o que esté definido pero $f(x_0) \neq \lim_{x\to x_0} f(x)$. En la gráfica de la figura anterior, esto sucede en $x_0 = 5$.

Salvando discontinuidades evitables

Las discontinuidades infinitas y las del tipo salto se consideran **inevitables**. Las continuidades evitables son más "suaves" que las inevitables: cuando una función $f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en un punto x_0 se la puede redefinir en ese punto para **evitar la discontinuidad**: basta elegir en x_0 el valor de la nueva función igual al límite de la función original. Este procedimiento genera una nueva función que podemos llamar $\tilde{f}(x)$, igual a la original en todo su dominio excepto en x_0, y además continua en x_0.

Ejemplo 2.3.2.1. $f(x) = \dfrac{\text{sen}x}{x}$ es discontinua en $x = 0$, ya que no está definida allí. Como sabemos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}x}{x} = 1$, la discontinuidad es evitable. Para evitar la discontinuidad se define

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Esta nueva función coincide con $f(x) = \dfrac{\text{sen}x}{x}$ en todo el eje real, excepto en $x = 0$ y por construcción resulta continua en $x = 0$.

Observen que cuando tengan que trabajar con una función $f(x)$ con una discontinuidad evitable en un punto x_0, puede ser conveniente cambiarla por otra $\tilde{f}(x)$ salvando la discontinuidad. Las funciones y $f(x)$ son casi iguales, pero $\tilde{f}(x)$ tendrá la ventaja de estar definida y ser continua en $x = 0$. Para cualquier valor de $x \neq 0$, las conclusiones que obtengan para $\tilde{f}(x)$ serán válidas también para $f(x)$.

Actividades

Actividad 2.3.2.1. Para fijar conceptos, elaboren la siguiente pregunta:

- ¿Qué tipos de discontinuidades conocen? Ilustren cada caso con gráficas esquemáticas, indicando cuál(es) condiciones de continuidad fallan.

Actividad 2.3.2.2. Encuentren y clasifiquen las discontinuidades de las siguientes funciones. Si son evitables, indiquen cómo salvar esas discontinuidades.

1. $f(x) = \dfrac{2x - 3x^2}{1 - x^2}$

2. $g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \leq 0 \\ 2-x, & \text{si } 0 < x < 3 \\ (x-2)^2, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$
3. $h(x) = \dfrac{x^4-1}{x-1}$

2.3.3 Dominio de continuidad y continuidad en conjuntos

Seguramente habrán notado que las funciones con que trabajamos son continuas en la mayoría de los puntos del eje real, y que hay unos pocos puntos problemáticos donde la continuidad puede fallar. En general conviene reconocer el amplio conjunto de puntos donde una función es continua, y luego identificar los puntos de discontinuidad.

Comencemos con la definición de **dominio de continuidad**:

Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$, se llama **dominio de continuidad** *de f al conjunto de todos puntos donde f es continua,*

$$\textit{dominio de continuidad de } f = \{x \in D : f \textit{ es continua en } x\}$$

Según esta definición, el dominio de continuidad de una función siempre está incluido dentro de su dominio de definición. En algunos casos encontramos que el dominio de continuidad coincide con el dominio de definición; en esos casos se dice que la función es "continua en todo su dominio". Sin embargo, esta frase no quiere decir que la función no presente discontinuidades: es común que haya discontinuidades en puntos fuera del dominio (o sea, donde la función no está definida).

Ejemplo 2.3.3.1. Analicemos la función recíproca, $f(x) = 1/x$. Esbocen a mano una gráfica de la función.

- ¿Cuál es su dominio natural?
- ¿Cuál es su dominio de continuidad?
- Verifiquen que $f(x)$ presenta una discontinuidad en $x_0 = 0$, señalando cuál o cuáles condiciones de la continuidad no se cumplen.
- Expliquen por qué es correcto afirmar que la función $1/x$ es "continua en todo su dominio", aunque tiene discontinuidades.

Más adelante nos interesará analizar solamente algún subconjunto del dominio de una función. Se dice que una función $f(x)$ es **continua en un conjunto** A cuando $f(x)$ es continua en cada punto x_0 del conjunto A.
Un caso especial es el de intervalos cerrados:

Se *dice que una función $f(x)$ es* **continua en un intervalo cerrado** $[a,b]$ *cuando es :*

- *continua en todo punto del intervalo abierto (a,b)*
- *al menos continua por derecha en a*
- *al menos continua por izquierda en b.*

(más en general, si el dominio fuera de la forma $(a,b]$ o $[a,b)$, se considera solamente la continuidad lateral en el extremo cerrado del intervalo).

Las funciones que son **continuas en intervalos cerrados** tienen propiedades particulares que trataremos en la próxima sección.

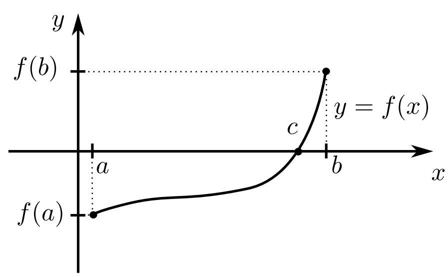
2.3.4 Teoremas de Bolzano y del Valor Intermedio

Las funciones continuas en intervalos cerrados tienen una propiedad básica, conocida como Teorema de Bolzano (1817):

Teorema de Bolzano

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

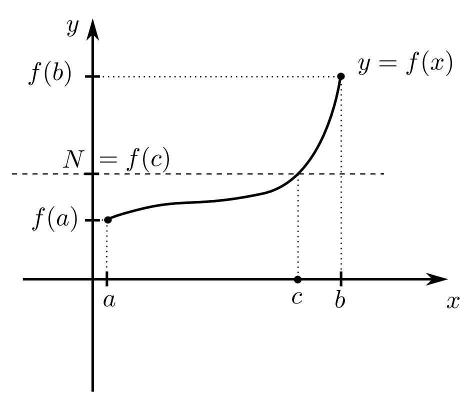
El enunciado es muy intuitivo: resulta evidente que una función continua no puede cambiar de signo sin cortar al menos una vez al eje x. Sin embargo, la demostración formal es delicada y escapa al alcance de los textos elementales de Análisis Matemático. Observen que el Teorema de Bolzano asegura que **existe** al menos un número c entre a y b donde$f(c) = 0$; no nos dice cuál es ese número, solamente garantiza su existencia. Tampoco nos dice si existen más puntos entre a y b donde la función corte al eje x.



El **Teorema del Valor Intermedio** es una generalización inmediata del Teorema de Bolzano. Afirma que la gráfica de una función $y = f(x)$ continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ pasa al menos una vez por cualquier valor de y intermedio entre los valores $f(a)$ y $f(b)$:

Teorema del Valor Intermedio

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(a) \neq f(b)$. Para todo valor N entre $f(a)$ y $f(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = N$.



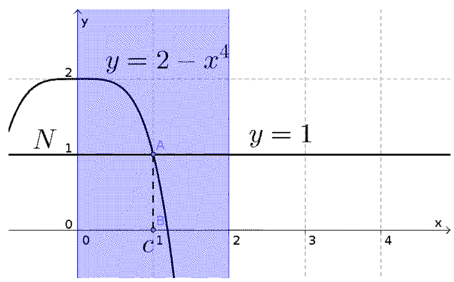
La figura ilustra la situación descripta en el teorema, suponiendo para fijar ideas que $f(a) < f(b)$, y permite argumentar gráficamente su validez: al ser $f(x)$ una función continua en $[a, b]$, el trazo de la gráfica no se corta entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Por lo tanto, si elegimos cualquier N intermedio entre $f(a)$ y $f(b)$ (es decir, $f(a) < N < f(b)$) la gráfica de la función debe cortar la recta horizontal de altura N en algún punto c entre a y b; en este punto se cumple que $f(c) = N$.

Observen que el Teorema del Valor Intermedio asegura que existe al menos un número c entre a y b donde$f(c) = N$; no nos dice cuál es ese número, solamente garantiza su existencia. Tampoco nos dice si existen más puntos entre a y b donde la función tome el mismo valor N.

Si interesa buscar el valor c que anticipa el Teorema del Valor Intermedio, se debería resolver la ecuación $f(c) = N$ donde c es la incógnita; a veces despejar c será sencillo, pero si la expresión de f es complicada puede darse el caso en que no haya manera de resolver esta ecuación. La importancia del teorema radica en asegurar que **existe** una solución, aunque no sepamos cómo encontrarla.

EJEMPLO 2.3.4.1. Consideremos $f(x) = 2 - x^4$, que es continua en todos los reales, y analicemos la afirmación del teorema en el intervalo $[0, 2]$.

Como $f(0) = 2$ y $f(2) = -14$, el Teorema del Valor Intermedio garantiza que para cualquier N entre -14 y 2 existe c entre 0 y 2 tal que $f(c) = N$. Por ejemplo, tomemos $N = 1$: seguro existe algún c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $f(c) = 1$. En este caso podemos encontrarlo, resolviendo ecuación $2 - c^4 = 1$; despejamos $c = \pm 1$, pero como buscamos $c \in (0, 2)$ la solución apropiada es $c = 1$.



El Teorema del Valor Intermedio tiene importantes consecuencias teóricas, que aparecerán durante nuestro curso, y también aplicaciones prácticas.

Aplicación: análisis de regiones de positividad y negatividad.

Cuando una función $f(x)$ es continua en un intervalo abierto (a, b) y no se anula en ningún punto de ese intervalo, vemos que debe mantener su signo en dicho intervalo. El Teorema de Bolzano justifica esta afirmación: si la función pudiera tener distinto signo en dos puntos x_1 y x_2 del intervalo (a, b), el teorema aplicado al intervalo cerrado $[x_1, x_2]$ afirmaría que existe algún punto c entre x_1 y x_2 donde $f(c) = 0$. Como eso no sucede, es imposible que existan dos puntos del intervalo (a, b) donde $f(x)$ muestre distinto signo.

Como aplicación práctica,si sabemos que una función es continua en un intervalo abierto (a, b) y que no se anula en todo ese intervalo, basta con evaluar el signo de la función en **un solo punto** para conocer su signo en **todo el intervalo**.

Dada $f(x)$ una función continua en un intervalo abierto (a, b) que no se anula en ningún punto de dicho intervalo, se verifica que:

- *si hay un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) > 0$, entonces $f(x) > 0$ en todo el intervalo (a, b)*
- *si hay un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) < 0$, entonces $f(x) < 0$ en todo el intervalo (a, b)*

EJEMPLO 2.3.4.2. Usando esta propiedad, podemos buscar las regiones donde $f(x) = x^3 - x$ sea positiva, y donde sea negativa.

En primer lugar $f(x)$ es continua en todo el eje real, por ser un polinomio.

En segundo lugar, los únicos puntos donde se anula surgen de resolver $x^3 - x = 0$; esos puntos son $x = -1$, 0, 1. En consecuencia, el signo se mantiene en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

- Evaluando $f(-2) = -6$ sabemos que $f(x)$ es negativa en todo el intervalo $(-\infty, -1)$.

- Evaluando $f(-1/2) = 3/8$ sabemos que $f(x)$ es positiva en todo el intervalo $(-1, 0)$.
- Evaluando $f(1/2) = -3/8$ sabemos que $f(x)$ es negativa en todo el intervalo $(0, 1)$.
- Evaluando $f(2) = 6$ sabemos que $f(x)$ es positiva en todo el intervalo $(1, +\infty)$.

Factoreando $x^3 - x = x\left(x^2 - 1\right) = x\,(x+1)\,(x-1)$, y analizando el signo de cada factor, pueden comprobar los resultados.

Aplicación: existencia y localización de soluciones de una ecuación

Otra aplicación de este teorema es la localización de soluciones de una ecuación escrita como $f(c) = 0$.

Ejemplo 2.3.4.3. Necesitamos averiguar si el polinomio $p(x) = x^3 + 2x - 1$ tiene una raíz entre 0 y 1. Es decir, si existe c en el intervalo $(0, 1)$ tal que $p(c) = 0$. Noten que es un polinomio cúbico y no hay forma sencilla de despejar c de la ecuación $c^3 + 2c - 1 = 0$.

.

Como

- $p(x)$ es continua en todo el eje real (por ser un polinomio)
- $p(0) = -1 < 0$
- $p(1) = 2 > 0$

por el Teorema del Valor Intermedio aplicado al intervalo $[0, 1]$, con $N = 0$, existe c en el intervalo $(0, 1)$ tal que $p(c) = 0$. Aunque no podamos resolver esta ecuación cúbica, hemos localizado la existencia de una solución en el intervalo $(0, 1)$.

Actividades

Actividad 2.3.4.1. Para fijar conceptos, elaboren la siguiente propuesta:

- Consideren que f es una función continua en el intervalo $[1, 5]$ tal que $f(1) = 3$ y $f(5) = -2$. Alguien afirma que $f(x)$ no se anula en todo el intervalo $(-1, 5)$. ¿Es verdadera o falsa esa afirmación?
- Preparen un argumento para defender su respuesta.

Actividad 2.3.4.2. Analicen la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 1}$ en todo el eje real.
- Aplicando el Teorema del Valor Intermedio, determinen los intervalos donde $f(x)$ no cambia de signo.
- Identifiquen, en cada uno de esos intervalos, si $f(x)$ es positiva o negativa.
- Para corroborar sus respuestas, factoricen $x^2 - x - 2$ y analicen el signo de cada factor o divisor de $f(x)$.

Actividad 2.3.4.3. Se sabe que $f(x)$ es una función continua en $[0, 1]$, excepto en $x = 0.25$, y también que $f(0) = 1$ y que $f(1) = 3$.

Grafiquen dos posibles ejemplos de funciones bajo esas condiciones: una que verifique la conclusión del Teorema del Valor Intermedio, y otra que no lo haga, para $N = 2$.

GeoGebra 2.3.4.4. Se desea averiguar si las gráficas de $f(x) = \cos x$ y $g(x) = x$ se cortan en algún punto entre $x_1 = 0$ y $x_2 = \pi/2$.

- Para justificar que hay solución, aunque no la calculen,
  - consideren la función $h(x) = \cos(x) - x$.
  - analicen mediante el Teorema del Valor Intermedio si existe un valor c entre 0 tal que $\cos(c) - c = 0$.
- Para comprobar analíticamente que hay intersección entre las gráficas habría que resolver la ecuación $\cos x - x = 0$, lo cual es bastante difícil (es una ecuación trascendente, no se resuelve por métodos algebraicos). Grafiquen $h(x) = \cos(x) - x$ para comprobar que existe una solución.

- O bien, volviendo a la consigna original, grafiquen en un mismo plano las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = x$. Comprueben que las gráficas se cortan una vez y lean las coordenadas del punto de intersección.

CAPÍTULO 3
Derivadas

Contenidos del capítulo: cociente incremental entre dos puntos y derivada en un punto. Derivadas laterales en un punto. Recta tangente y pendiente de gráficas. Relación entre derivabilidad y continuidad. Aproximación diferencial.
Función derivada. Dominio de derivabilidad. Reglas de derivación para la suma, producto, cociente y composición (regla de la cadena) de funciones derivables.

El cálculo de derivadas de funciones de variable real ha sido, históricamente, el comienzo del cálculo moderno. Sus aplicaciones como herramienta en el análisis de funciones son tan poderosas que hoy en día el cálculo infinitesimal es una asignatura central en el primer año de carreras de ciencias, economía, ingeniería, tecnicaturas, arquitectura, etc.

Podemos decir que, más que una herramienta, el uso de derivadas en el modelado matemático de situaciones reales constituye una manera de pensar la Naturaleza. Esperamos que este curso los ayude, llegado el momento de usarlas en otros contextos, a pensar con derivadas.

3.1 Cociente incremental y derivada

Contenidos de esta sección: incrementos en las variables y cociente de incrementos. Noción y definición de derivada en un punto. Rectas secante en dos puntos de una gráfica y recta tangente en un punto. Relación entre derivabilidad y continuidad.

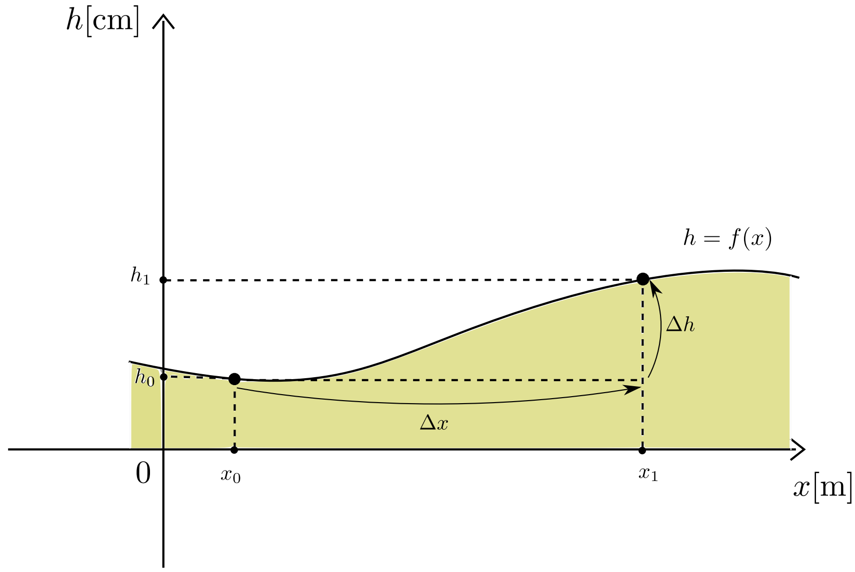
El objetivo de esta sección es analizar y describir cómo cambia el valor de una función a medida que cambia su variable independiente.

3.1.1 Introducción al concepto de derivada

Comencemos con un ejemplo:

Ejemplo 3.1.1.1. Al recorrer caminando un sendero de montaña notamos que nuestra altura respecto del valle depende de la distancia avanzada. Las características de la marcha no se relacionan sensiblemente con la altura neta, sino con la pendiente del camino: cuántos centímetros subimos (o bajamos) por cada metro recorrido. Vamos a analizar esta experiencia con un modelo matemático.

Llamemos h a nuestra altura respecto del valle, y x a la distancia horizontal recorrida desde el punto de partida. Una función $h = f(x)$ describe cómo la altura depende de la distancia recorrida; supongamos que x se mide en metros y que h se mide en centímetros. Podemos graficar un perfil del camino:



Analicemos lo que sucede en un **tramo** del camino, es decir el proceso en el cual la posición horizontal x cambia desde un valor x_0 hasta otro valor x_1, con el correspondiente cambio en altura desde $h_0 = f(x_0)$ hasta $h_1 = f(x_1)$. El incremento del valor de x se calcula como

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

(que se lee "delta x") y el incremento del valor de h se calcula como

$$\Delta h = h_1 - h_0 = f(x_1) - f(x_0)$$

(que se lee "delta h"). Estos incrementos están señalados en la figura anterior. Para fijar ideas supongamos que Δx es positivo, en tanto que Δh puede ser positivo si vamos en subida, negativo si vamos en bajada, o cero en un tramo horizontal.

La pendiente del tramo recorrido se puede caracterizar con un **cociente** del incremento de altura Δh respecto del incremento horizontal Δx,

$$\text{pendiente del tramo recorrido: } \frac{\Delta h}{\Delta x}$$

Este cociente, llamado **cociente incremental** es una forma significativa de relacionar los dos incrementos. En este ejemplo representa la cantidad de centímetros subidos (o bajados) por metro horizontal recorrido. Su valor se expresa en "centímetros por metro".

Si el perfil del camino tiene forma de recta, este cociente no es otra cosa que la pendiente de esa recta. Como ya sabemos, el cociente incremental dará la misma pendiente en cualquier tramo de un camino recto.

Pero si el perfil del camino es curvo, el cociente incremental en distintos tramos dará distintos valores. Además, al considerar solamente datos del inicio y el final del tramo, no registramos los detalles intermedios del camino: el cociente incremental nos da la pendiente de una recta artificial que pase por el punto inicial del tramo, $(x_0, h(x_0))$, y por el punto final del tramo, $(x_1, h(x_1))$, ignorando los detalles del recorrido. Por este motivo al cociente incremental también se lo llama **razón de cambio promedio**[1].

[1] La razón entre dos cantidades se define como su cociente; en problemas de regla de tres simple seguramente habrán escrito la proporcionalidad entre variables a y b igualando razones, digamos

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1}$$

Intentemos mejorar esta descripción de la pendiente del camino: **para lograr mejor información necesitamos considerar un punto vecino x más cercano a x_0**. La mejor descripción posible acerca de la pendiente del camino, al avanzar desde el punto x_0, la conseguiremos tomando el **límite del cociente incremental para $x \to x_0^+$**. También podemos describir la pendiente con que se llega al punto x_0, viniendo desde un punto a la izquierda de x_0: para hacerlo tenemos que evaluar la altura $h(x)$ en puntos vecinos con $x < x_0$, y explorar el límite del cociente incremental para $x \to x_0^-$. Después de tomar estos límites, la razón de cambio ya no se asocia a un intervalo, sino al propio punto x_0; por eso al resultado se lo llama **razón de cambio local**.

Hagamos un ejemplo concreto.

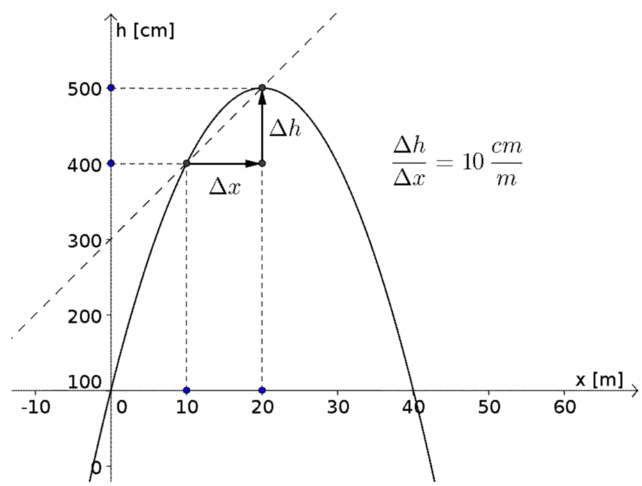
EJEMPLO 3.1.1.2. Consideremos un camino con altura dada por la función

$$h(x) = 100 + 40x - x^2$$

donde x se mide en metros (m) y h se mide en centímetros (cm). Si pasamos de $x_0 = 10\,m$ a $x_1 = 20\,m$, la altura cambia desde $h_0 = f(x_0) = 400\,cm$ a $h_1 = f(x_1) = 500\,cm$. La razón de cambio promedio en este tramo es

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{500\,cm - 400\,cm}{20\,m - 10\,m} = 10\,\frac{cm}{m}$$

Esto significa que, en promedio, se suben $10\,cm$ por cada metro recorrido.



En un tramo más corto, digamos desde el mismo punto inicial $x_0 = 10\,m$ hasta $x_2 = 11\,m$, la altura cambia desde $h_0 = f(x_0) = 400\,cm$ a $h_2 = f(x_2) = 419\,cm$. La razón de cambio promedio en este tramo más corto es de

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{419\,cm - 400\,cm}{11\,m - 10\,m} = 19\,\frac{cm}{m},$$

bastante mayor que en el tramo anterior. Intenten graficar estos incrementos y su cociente sobre el gráfico anterior.

Para calcular la pendiente en el punto $x_0 = 10\,m$ propiamente dicho, proponemos un tramo arbitrario, desde x_0 hasta un punto vecino x (distinto de x_0) y calculamos

$$\Delta h = h(x) - h(x_0) = (100 + 40x - x^2) - 400 \ \ \text{(en } cm\text{)}$$

La razón de cambio en este tramo resulta

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{40x - x^2 - 300}{x - 10} \quad \text{(en } \frac{cm}{m}\text{)}$$

y naturalmente depende del valor de x que aún no hemos especificado. En vez de dar un valor a x, vamos a considerar incrementos infinitesimales, tomando el límite para $x \to 10^+$ (en cm), por derecha. Este límite es indeterminado, del "tipo 0 sobre 0", porque $\Delta x \to 0$ y $\Delta h \to 0$ cuando $x \to 10^+$. Podemos factorizar $40x - x^2 - 300 = -(x-10)(x-30)$ y salvar la indeterminación, encontrando que

$$\lim_{x \to 10^+} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \lim_{x \to 10^+} \frac{40x - x^2 - 300}{x - 10} = \lim_{x \to 10^+} [-(x-30)] = 20\,\frac{cm}{m}$$

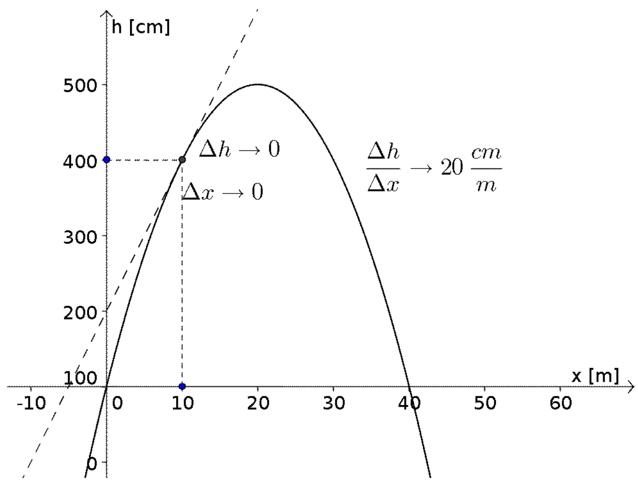
La pendiente del camino, al moverse infinitesimalmente a partir de $x_0 = 10\,m$ hacia la derecha, es equivalente a subir 20 centímetros por cada metro recorrido.

El mismo cálculo, con x a la izquierda de $x_0 = 10\,cm$, nos permite describir la pendiente con que el camino llega a x_0:

$$\lim_{x \to 10^-} \frac{\Delta h}{\Delta x} = 20\,\frac{cm}{m}$$

La pendiente del camino, a llegar a $x_0 = 10\,m$, por la izquierda, también es equivalente a subir 20 centímetros por cada metro recorrido.

Como la pendiente al llegar y la pendiente al avanzar son iguales, se dice que la **pendiente en el punto** $x_0 = 10\,m$ es de "20 centímetros por metro".



En este ejemplo encontramos todos los conceptos básicos que construyen la definición de derivada. Vamos a formalizarlos en la siguiente sección.

Actividades

Actividad 3.1.1.1. Siguiendo la misma estrategia del ejemplo, calculen la pendiente del camino cuando se han recorrido $30\,m$. Comenten si en ese lugar el camino se encuentra en subida o en bajada, o en un punto neutro.

Actividad 3.1.1.2. Para fijar los conceptos, trabajen otro ejemplo: consideren una función $V(p)$ que expresa el volumen V de un líquido, medido en litros, en función de la presión p a que se encuentra sometido, medida en milímetros de mercurio.

- ¿En qué unidades se expresa el cociente incremental del volumen respecto de la presión aplicada?
- ¿Qué interpretación pueden dar a este cociente incremental?
- ¿Qué interpretación pueden dar al límite de este cociente incremental, cuando la variación de presión es infinitesimal?

3.1.2 Derivada de una función en un punto

Consideremos una magnitud y que depende de otra magnitud x según una función $y = f(x)$. Si se cambia el valor de x se obtiene un cambio en el valor de $f(x)$: digamos que el valor de x pasa de una cantidad x_0 a una cantidad x_1 y que el valor de la función pasa de $y_0 = f(x_0)$ a $y_1 = f(x_1)$. La forma apropiada de comparar estos cambios es calcular su cociente:

Cuando la variable independiente x de una función $y = f(x)$ experimenta un incremento $\Delta x = x_1 - x_0$, y en consecuencia la variable dependiente experimenta un incremento $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$, llamamos **cociente incremental** *o razón de cambio promedio de la función f al cociente entre el incremento de la variable dependiente y el incremento de la variable independiente,*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Consideremos además que el dominio de la función $y = f(x)$ incluye un intervalo abierto alrededor de x_0 (es decir, que contiene a x_0 y también puntos vecinos a ambos lados). Entonces es posible evaluar $f(x)$ a la izquierda y a la derecha de x_0, en puntos x tan cercanos a x_0 como se quiera, y explorar el comportamiento del cociente incremental cuando $x \to x_0$. Esa exploración nos lleva a la definición de **función derivable en un punto**:

Dada una función $y = f(x)$ definida en un intervalo abierto alrededor de x_0, se dice que f es **derivable** en x_0 *siempre que exista el límite del cociente incremental*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Vale la pena insistir en que el límite del cociente incremental podría no dar un número (por un comportamiento infinito u oscilante). En esos casos se dice que la función no es derivable en ese punto.

Si $f(x)$ resulta derivable en x_0, se define la **derivada** de $f(x)$ en x_0 como el límite del cociente incremental:

Dada una función $y = f(x)$ definida en un intervalo abierto alrededor de x_0 y derivable en x_0 se llama **derivada** de f respecto de x en el punto x_0 *al valor del límite*

$$\textit{derivada de } f \textit{ respecto de } x \textit{ en el punto } x_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

La derivada se anota $f'(x_0)$ (que se lee "f prima en x_0"), o bien $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$ (que se lee "derivada de f respecto de x en $x = x_0$").

Ejemplo 3.1.2.1. En el ejemplo 3.1.1.2 estudiamos la función

$$y = h(x) = 100 + 40x - x^2$$

y calculamos el límite de un cociente incremental alrededor de $x_0 = 10$, tanto por derecha como por izquierda. El resultado hallado fue

$$\lim_{x \to 10} \frac{h(x) - h(10)}{x - 10} = \lim_{x \to 10} \frac{(100 + 40x - x^2) - 400}{x - 10} = 20\,\frac{cm}{m}$$

Corresponde afirmar que la función $h(x)$ es derivable en $x_0 = 10\,m$, y que la derivada de h respecto de x en ese punto vale

$$\left.\frac{dh}{dx}\right|_{x=10\,cm} = 20\,\frac{cm}{m}$$

Al explorar el límite del cociente incremental puede suceder que el límite exista sólo por izquierda, o sólo por derecha. En esos casos se dice que existe la **derivada lateral**:

Dada una función $y = f(x)$ definida en un intervalo semi-cerrado a la izquierda de x_0 de la forma $(x_0 - r, x_0]$, si existe el límite lateral

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se dice que la función $f(x)$ es derivable por izquierda en x_0 y se llama **derivada lateral por izquierda** *a*

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Análogamente, dada una función $y = f(x)$ definida en un intervalo semicerrado a la derecha de x_0 de la forma $[x_0, x_0 + r)$, si existe el límite lateral

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se dice que la función $f(x)$ es derivable por derecha en x_0 y se llama **derivada lateral por derecha** *a*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

EJEMPLO 3.1.2.2. Una función sencilla que está naturalmente definida en el dominio semicerrado $[0, +\infty)$ es $f(x) = \sqrt{x}$. En $x_0 = 0$ sólo podemos explorar la derivada lateral por derecha. Construimos el cociente incremental, para $x > 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

Cuando $x \to 0^+$ el límite resulta indeterminado, del tipo "0 sobre 0". Para $x > 0$ podemos simplificar para salvar la indeterminación. Encontramos que

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

El cociente incremental tiende a más infinito, poniendo en evidencia que, cuando $x \to 0^+$, x es un infinitésimo mucho más pequeño que $\sqrt{x}$.

La conclusión de este análisis es que **no existe la derivada por derecha de** $f(x) = \sqrt{x}$ **en** $x_0 = 0$.

Observación práctica

Por definición, el cálculo de derivadas siempre nos lleva a estudiar el límite de un cociente cuyo denominador tiende a cero; si la función que se analiza es continua, el numerador también tiende a cero y el límite del cociente incremental es indeterminado del "tipo 0 sobre 0". Para intentar salvar la indeterminación, es conveniente introducir una variable $h = x - x_0$ que represente el incremento de la variable x y nos permita escribir $x = x_0 + h$. Calculando el límite con la regla de sustitución, podemos escribir que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Esta segunda forma de escribir el límite del cociente incremental es equivalente a la que usamos como definición. Usando este enfoque, para salvar la indeterminación "tipo 0 sobre 0" deben intentar sacar un factor h como factor común del numerador y luego simplificar; en general esto resulta más sencillo que factorizar $x - x_0$.

Ejemplo 3.1.2.3. Calculemos, si existe, la derivada de $f(x) = x^3$ en un punto x_0 genérico. Usando la segunda forma que mencionamos para el cociente incremental, tenemos que estudiar

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^3 + 3hx_0^2 + 3h^2x_0 + h^3 - x_0^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(3x_0^2 + 3hx_0 + h^2\right)}{h} \\
&= 3x_0^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f(x) = x^3$ es derivable en cualquier punto x_0 real, donde la derivada vale $f'(x_0) = 3x_0^2$.

Intenten hacer este cálculo con la definición $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ y comparen las dificultades encontradas.

Actividades

Actividad 3.1.2.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes preguntas:

- ¿Qué entienden por cociente incremental? Escriban el cociente incremental para la función $f(x) = x^2$, entre $x = 1$ y $x = 2$.
- Si la derivada de una función $y = f(x)$ existe en $x_0 = 4$ y vale 0.5, ¿cómo describirían el comportamiento del incremento $\Delta f = f(x) - f(4)$ y del incremento $\Delta x = x - 4$ para x cercano a 4?
- Si en un dado momento el velocímetro de un auto marca 60 km/h, ¿significa que recorrerá 60 km en la próxima hora? ¿significa que recorrerá 1 km en el próximo minuto? ¿cómo describirían el significado del velocímetro? ¿qué relación encuentran con el concepto de derivada?

Actividad 3.1.2.2. Calculen la derivada de $f(x) = x^2 + x$ en el punto $x_0 = 1$. Para eso:

- Expresen el cociente incremental de $f(x)$ cuando x cambia desde $x_0 = 1$ hasta un punto vecino.
- Armen una tabla de valores para ese cociente incremental y exploren numéricamente el límite para $x \to 1$ por ambos lados.
- Calculen el límite del cociente incremental para $x \to 1$ usando reglas de cálculo de límites (recuerden que conviene escribir el cociente incremental en función del incremento $h = x - x_0$).

Actividad 3.1.2.3. En el ejemplo 3.1.1.2 la función $h(x)$ está definida para $x \geq 0$. Calculen la derivada lateral en $x = 0$ y discutan su interpretación.

3.1.3 Interpretación geométrica de la derivada: rectas secantes y recta tangente

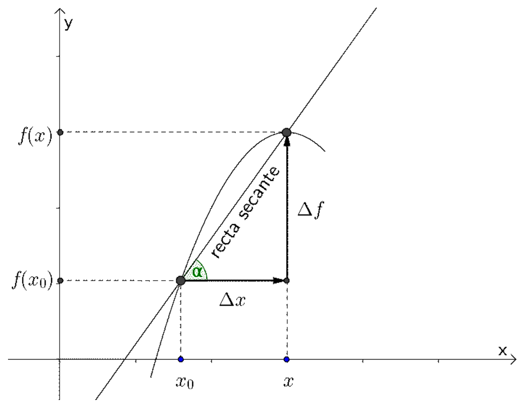
El proceso de construir un cociente incremental y el proceso de tomar el correspondiente límite para definir la derivada de una función en un punto tienen una clara interpretación geométrica. El ingrediente fundamental en esta interpretación es la noción de pendiente de la recta.

Trabajemos sobre la gráfica de una función $y = f(x)$, dibujada en el plano xy, para interpretar geométricamente el cociente incremental.

- Elijamos primero un valor x_0 donde $f(x)$ sea continua y elijamos otro valor x vecino a x_0.
- El incremento $\Delta x = x - x_0$ se dibuja sobre el eje x como el desplazamiento que lleva desde x_0 hasta x.
- Marquemos los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x, f(x))$ sobre la gráfica de la función.
- Marquemos también los valores de $f(x_0)$ y de $f(x)$ sobre el eje y. El incremento entre esos valores se calcula como $\Delta f = f(x) - f(x_0)$, y se dibuja sobre el eje y como el desplazamiento que lleva desde $f(x_0)$ hasta $f(x)$ (también se lo suele llamar Δy).

- Conviene copiar el incremento Δx como un segmento horizontal que comience en $(x_0, f(x_0))$, y el incremento Δf como un segmento vertical que comience donde termina Δx y vaya hasta $(x, f(x))$ sobre la gráfica.

- Tracemos la recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y $(x, f(x))$. Por cortar a la gráfica en dos puntos distintos se dice que es una **recta secante**.



- Observen que se forma un triángulo rectángulo con Δx como cateto horizontal, Δf como cateto vertical y un segmento de la recta secante como hipotenusa. **El cociente incremental representa la pendiente de esa recta secante**

$$m_{\text{secante}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

En términos de trigonometría, el cociente incremental también representa la tangente del ángulo que la recta secante forma con la dirección horizontal (sombreado como α en la figura).

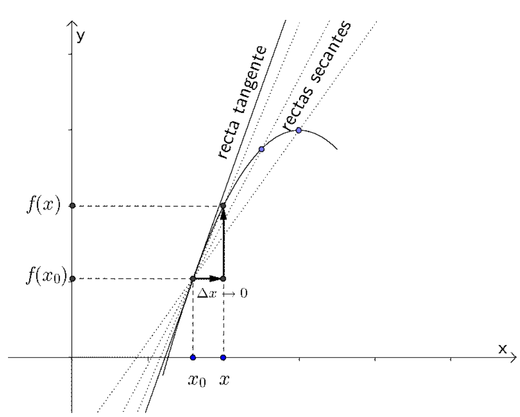
El proceso de tomar el límite $x \to x_0$ se puede interpretar como el movimiento del punto x hacia el punto x_0:

- Al mover el valor de x hacia x_0, el punto $(x, f(x))$ se mueve sobre la gráfica de la función. Dado que $f(x)$ es continua en x_0, $f(x)$ tiende a $f(x_0)$ cuando $x \to x_0$; es decir, el punto de la gráfica $(x, f(x))$ se mueve hacia $(x_0, f(x_0))$.

- Observen que el incremento Δx y el incremento Δf son cantidades infinitesimales, ambas tienden a 0 cuando $x \to x_0$.

- Cuando la función $f(x)$ es derivable en x_0, por definición el cociente incremental $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ tiende a un valor finito $f'(x_0)$. Gráficamente, la pendiente de la recta secante que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y $(x, f(x))$ tiende a estabilizarse cuando $x \to x_0$,

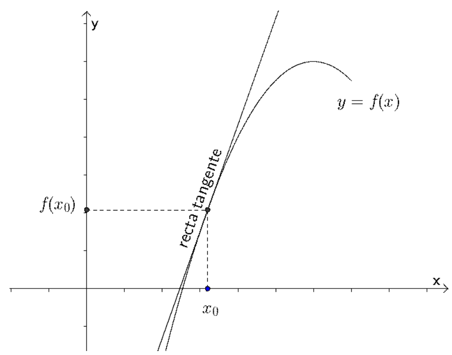
$$m_{\text{secante}} \to f'(x_0) \text{ cuando } x \to x_0$$



- La recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ y tiene pendiente $m = f'(x_0)$ surge, gráficamente, como el límite de las rectas secantes cuando $x \to x_0$. Se la llama **recta tangente**[2]:

Recta tangente

Si una función $y = f(x)$ es derivable en x_0, se llama **recta tangente a la gráfica de f en el punto** $(x_0, f(x_0))$ *a la recta que* ▪ *pasa por* $(x_0, f(x_0))$ ▪ *tiene pendiente* $m = f'(x_0)$



Podemos decir que la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ es la recta que **pasa** por dicho punto y tiene la **misma pendiente que la gráfica**[3] **de** $f(x)$ en dicho punto. Recuerden entonces que el valor de la derivada de $f(x)$ en x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ *en* $(x_0, f(x_0))$.

Según esta definición, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ se escribe

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Noten que la recta tangente no está definida por dos puntos de la gráfica de f (como la secante), sino por **un punto y una pendiente**. En la ecuación de la recta tangente $f(x_0)$ y $f'(x_0)$ son números (¡no funciones!) asociados al punto de tangencia $(x_0, f(x_0))$.

Ejemplo 3.1.3.1. Veamos si la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3$ admite una recta tangente en el punto de abscisa $x_0 = 1$.

En primer lugar comprobamos que $f(x)$ está definida en $x = 1$, con valor $y_0 = f(1) = 4$. Es decir, la gráfica de $f(x)$ pasa por el punto $(1, 4)$.

Luego vemos si existe la derivada en $x_0 = 1$, estudiando

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(x^2 + 3\right) - 4}{x - 1}$$

que es un límite del "tipo cero sobre cero". Factorizando el numerador encontramos que

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = 2$$

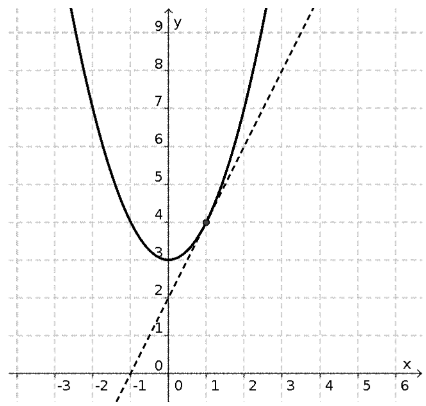
[2] No se debe confundir recta tangente con la noción trigonométrica de tangente de un ángulo.

[3] Estrictamente, la noción de pendiente corresponde a rectas; la definición de recta tangente que hemos introducido permite extender el concepto y hablar de pendiente de una gráfica en un dado punto.

Efectivamente existe $f'(1) = 2$, y en consecuencia la gráfica admite recta tangente en el punto $(1, 4)$. La ecuación de la recta tangente se construye como

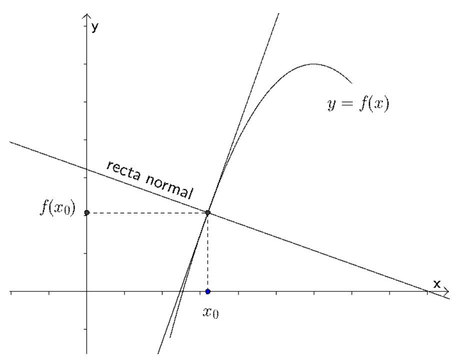
$$y - 4 = 2\,(x - 1)$$

que en forma explícita se escribe $y = 2x + 2$. En un gráfico hecho con GeoGebra pueden apreciar la gráfica de la parábola y la recta tangente que hemos construido:



Recta normal

Usando propiedades de rectas también se puede construir una **recta normal** a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$. Se trata de una recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y es **perpendicular** a la recta tangente. Si $f'(x_0) \neq 0$, la recta normal tiene pendiente $m_{\text{normal}} = -1/f'(x_0)$. En cambio, si $f'(x_0) = 0$, la recta tangente es horizontal y la recta normal resulta vertical: su ecuación es $x = x_0$ y no tiene definida una pendiente.



Actividades

ACTIVIDAD 3.1.3.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes preguntas:

- ¿Qué entienden por recta secante? Grafiquen la función $f(x) = x^2$ y varias rectas secantes que pasen por $(1, 1)$.
- ¿Qué entienden por recta tangente? Intenten graficar la recta tangente a la gráfica de la misma función $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$.
- ¿Qué entienden por recta normal? Intenten graficar la recta normal a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$.

GEOGEBRA 3.1.3.2. Visualizar gráficamente el significado de un cociente incremental y de una derivada es tan importante que proponemos un extenso ejercicio para hacer con GeoGebra.

- Parte gráfica:

- Elijan y grafiquen una función $f(x)$ (que sea más interesante que las constantes y las lineales) y elijan un punto x_0 en su dominio.

- Verifiquen que en el dominio de f haya puntos vecinos a x_0, a derecha y a izquierda.

- Ubiquen el punto $P = (x_0, f(x_0))$ sobre la gráfica de f y un segundo punto $Q = (x_1, f(x_1))$ con $x_1 \neq x_0$.

- Tracen la recta que pasa por esos dos puntos, con la herramienta "Recta que pasa por Dos Puntos".

- Con el mouse, muevan el segundo punto Q tan cerca del primero como puedan sin que coincidan (conviene encontrar el menú "Opciones" y desactivar la "Atracción Punto-Cuadrícula"). Si la función que eligieron es derivable en el x_0 elegido, observarán cómo la recta secante se va acercando a la noción geométrica de una recta tangente.

- Seguramente funciona. No es que hayan tenido mucha suerte, ¡la mayoría de las funciones que trabajamos son derivables en casi cualquier punto de su dominio!

- Hagan una ampliación del gráfico alrededor del punto P (conviene mostrar los números con varios decimales, busquen Opciones y luego Redondeo). Con mucho zoom, mientras Q no coincida con P llegarán a distinguir entre la recta secante ("casi tangente") y la función.

- Para ver la verdadera recta tangente (tal como la hemos definido en esta sección) pueden usar la herramienta "Tangentes". Deben hacer un click primero en el punto P y otro click sobre la gráfica de la función.

- Parte algebraica:

- Pueden rescatar las coordenadas de cada punto. En la línea de entrada escriban

```
x0=x(P)
```

y verán en el panel de vista algebraica la coordenada x_0 del punto P. Escriban además

```
y0=y(P)
```

y tendrán la coordenada y_0 del punto P. Hagan lo mismo con el punto Q,

```
x1=x(Q)
y1=y(Q)
```

- Para calcular el cociente incremental, escriban la expresión

```
m=(y1-y0)/(x1-x0)
```

y verán en el panel de vista algebraica el resultado de `m`.

- Muevan el segundo punto Q tan cerca del primero como puedan sin que coincidan[4], y estarán explorando el límite del cociente incremental para $Q \to P$.

Actividad 3.1.3.3. Construyan la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x_0 = 4$. Grafiquen y den las coordenadas del punto de tangencia.

Construyan también la ecuación de la recta normal en el punto de abscisa $x_0 = 4$.

3.1.4 Relación entre derivabilidad y continuidad

Cuando sabemos que una función $f(x)$ es continua en un punto x_0 de su dominio, no podemos asegurar que sea derivable. Según la definición de continuidad solamente sabemos que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Luego podemos asegurar que el incremento Δf es un infinitésimo cuando $x \to x_0$, es decir

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

[4] Que realmente coincidan o no va a depender de la precisión gráfica y numérica del programa. Tengan en cuenta que la representación interna de las variables trabaja con más decimales que los que se muestran en la Vista Algebraica.

y que el límite del cociente incremental

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

es un límite indeterminado, del "tipo 0 sobre 0". Como sabemos, este límite puede existir o no existir, depende de la función continua que estemos trabajando: **si no existe, $f(x)$ será continua pero no será derivable en x_0; si existe, $f(x)$ será continua y derivable en x_0.**

Ejemplo 3.1.4.1. En este ejemplo analizamos la continuidad y derivabilidad de $f(x)=|x|$ en $x_0=0$. Escribamos explícitamente

$$f(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

y notemos que la fórmula de $f(x)$ cambia en $x_0=0$. Por esta razón hay que considerar separadamente los puntos vecinos $x\to 0$ por derecha y por izquierda.

Para analizar la continuidad calculamos:

- $f(0)=0$ (usando el segundo renglón)
- $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0$ (usando el primer renglón)
- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$ (usando el segundo renglón)

y concluimos que la función $f(x)$ es continua en $x_0=0$.

Para analizar derivabilidad por izquierda calculamos:

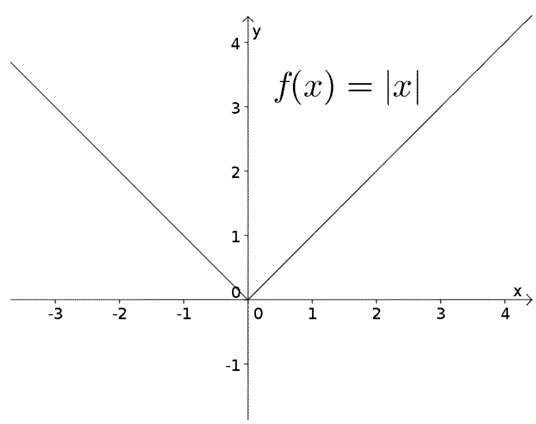
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x-0}=-1$$

Vemos que existe la derivada por izquierda y vale $f'_-(0)=-1$.

Para analizar derivabilidad por derecha calculamos:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0}=1$$

Vemos que también existe la derivada por derecha y vale $f'_+(0)=1$.



Dado que el límite lateral del cociente incremental es distinto por cada lado, vemos que el límite (por ambos lados a la vez) no existe. Es decir, no existe la derivada $f'(0)$.

En el punto $x_0=0$ la función $f(x)=|x|$ **es continua pero no es derivable**. Gráficamente, **el trazo es continuo pero no se puede identificar una recta tangente**.

Por otro lado, cuando sabemos que una función $f(x)$ es derivable en un punto x_0 de su dominio, sí podemos asegurar con toda generalidad que$f(x)$ es continua en x_0:

Si una función es derivable en un punto $x = x_0$, entonces también es continua en ese punto.

La justificación de esta propiedad está en el siguiente cálculo: si $f(x)$ es derivable en x_0,

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)}(x-x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

donde podemos multiplicar y dividir por $x - x_0$ aprovechando que en el cálculo del límite nunca se usa $x = x_0$, y podemos calcular el límite del producto como el producto de los límites, porque ambos existen. Para terminar,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)+f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) + \lim_{x\to x_0} f(x_0) = 0 + f(x_0) = f(x_0)$$

muestra que $f(x)$ es continua en x_0.

Como consecuencia inmediata (que en lenguaje de Lógica se llama contra-recíproca), **si $f(x)$ es discontinua en un punto x_0 entonces $f(x)$ no puede ser derivable en** x_0.

Actividades

ACTIVIDAD 3.1.4.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes preguntas:

- ¿Qué "tipos" de límite pueden encontrar al calcular la derivada de una función en un punto? ¿Qué pueden decir de la continuidad de la función en cada caso?
- Si una función $f(x)$ es continua en un punto x_0, ¿pueden afirmar que es derivable?
- Y al revés, si una función $f(x)$ es derivable en un punto x_0, ¿pueden afirmar que es continua?

ACTIVIDAD 3.1.4.2. Consideren la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x+4, & \text{si } x \le 1 \\ x+2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. ¿Está definida en $x_0 = 1$?
2. ¿Es continua en $x_0 = 1$?
3. ¿Es derivable en $x_0 = 1$? Si es derivable, ¿cuánto vale la derivada?

3.2 Derivada y aproximación lineal

Contenidos de esta sección: aproximación lineal. Diferencial de una función.

3.2.1 Diferenciales

Cuando $f(x)$ es derivable en x_0, la recta tangente es la recta que más se parece[5] a la gráfica de la función $y = f(x)$, al menos **cuando la variable** x **se mueve cerca de** x_0: si hacemos un zoom muy ampliado de la gráfica veremos que la función y su recta tangente parecen coincidir. Se suele decir que una función derivable es **localmente** similar a una recta.

Esta propiedad se utiliza frecuentemente en otras asignaturas para **aproximar** funciones derivables por funciones lineales, que son mucho más sencillas de trabajar. Podríamos hacer un curso de Análisis Matemático sin hablar de aproximaciones; sin embargo, preferimos anticipar el punto de vista más útil para sus carreras y aprovechar la noción de **aproximación lineal** para discutir aplicaciones o construir modelos matemáticos.

La aproximación lineal de una función $f(x)$, alrededor de un punto dado x_0, se construye trabajando con incrementos: interesa describir cuánto se desplaza x respecto de x_0 y describir cuánto se desplaza $y = f(x)$ respecto de $y_0 = f(x_0)$. Para eso se usa un lenguaje particular, basado en la noción de **incrementos diferenciales**.

Con la intención de trabajar con x cerca de x_0, al incremento $x - x_0$ se le asigna un nombre y una notación:

Se llama **incremento diferencial de** x *(o brevemente* **diferencial de** x) *a un incremento de la variable* x *respecto de un punto dado* x_0*. Se lo anota* dx*,*

$$dx = x - x_0$$

Esta construcción depende de x y de x_0, pero la usaremos con x_0 fijo; en este sentido, dx es una función de x. Consideremos una función $y = f(x)$ derivable en x_0, para la cual conocemos la ecuación de la recta tangente $y - y_0 = m(x - x_0)$, con $m = f'(x_0)$. Con ella construimos la función lineal

$$y = l(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

y la llamamos **aproximación lineal de la función** $f(x)$ **alrededor de** x_0.

El incremento de y en la aproximación lineal $l(x)$, cuando la variable pasa de x_0 a x, se calcula como

$$l(x) - l(x_0) = \big(f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\big) - \big(f'(x_0)(x_0 - x_0) + f(x_0)\big) = f'(x_0)(x - x_0)$$

A este incremento de y, calculado sobre la recta tangente, se le da el nombre de **diferencial de** f:

Dada una función $y = f(x)$ *derivable en* x_0*, y un incremento diferencial de la variable* $dx = x - x_0$*, se llama* **diferencial de** f*, que se anota* df*, al correspondiente incremento de* y *calculado con la aproximación lineal de la función alrededor de* x_0*:*

$$df = f'(x_0)dx$$

En palabras, el incremento diferencial df es el **incremento que tendría la función** $f(x)$**, a partir de** $f(x_0)$**, si se comportara como su recta tangente en** $(x_0, f(x_0))$. Dado que anotamos $y = f(x)$, al diferencial df también se lo puede llamar **diferencial de** y y anotar dy. Este incremento aproximado de la variable dependiente dy, por construcción, es proporcional al incremento de la variable independiente dx: el coeficiente de proporcionalidad es el valor de $f'(x_0)$, es decir la pendiente de la recta tangente.

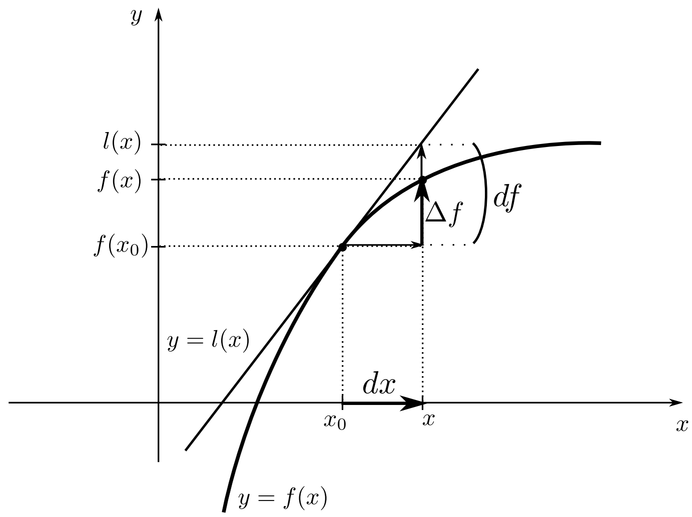
El incremento verdadero de la función $f(x)$ asociado a un incremento $dx = x - x_0$ de la variable se calcula como la resta

$$\Delta f = f(x) - f(x_0)$$

Observen que el incremento diferencial df asociado al mismo incremento dx en general no coincide con el incremento verdadero Δf, por eso hablamos de aproximación.

[5] Esta afirmación intuitiva se formaliza con el concepto de diferenciabilidad, que se trabaja en Análisis Matemático II.

En un esquema gráfico podemos volcar estos conceptos así:



Noten que estas definiciones no requieren que dx sea pequeño. Sin embargo, para una función derivable en x_0, esta aproximación es tan buena como se quiera bajo la condición de tomar dx suficientemente pequeño. En esas condiciones, cuando dxes pequeño, se suele anotar $\Delta f \approx df$, que se lee "el incremento de f es aproximadamente igual al incremento diferencial de f".

Si usamos la notación de Leibnitz para la derivada, encontramos una expresión muy sugestiva para escribir el diferencial de una función:

$$df = \frac{df}{dx} \cdot dx$$

que nos recuerda una operación entre fracciones. Sin embargo, $\dfrac{df}{dx}$ no representa una fracción sino el valor de la derivada de $f(x)$ en un punto x_0; esto no queda claramente indicado en la notación, y si lo olvidan pueden cometer serios errores conceptuales.

Volveremos a estas ideas en varios momentos de nuestro curso.

Actividades

Actividad 3.2.1.1. Si en este momento el velocímetro de un auto marca 60 km/h,

- ¿pueden calcular exactamente qué distancia recorrerá el próximo segundo?
- ¿pueden calcular aproximadamente qué distancia recorrerá el próximo segundo?
- ¿qué relación encuentran con el concepto de incremento diferencial?

Actividad 3.2.1.2. La ecuación de estado de los gases ideales establece una relación entre la presión P, volumen V y temperatura absoluta T de un gas:

$$PV = nRT$$

donde $R = 0.08\frac{atm.l}{mol.K}$ es la constante universal de los gases ideales y n es el número de moles del gas.

Usando como datos que el gas tiene $n = 2$ moles y se mantiene a una temperatura $T = 300\,K$, escriban la presión como función del volumen.

Calculen la presión del gas cuando $V = 10\,l$.

¿Qué unidades tiene $\dfrac{dP}{dV}$? ¿Qué interpretación le dan a la derivada $\dfrac{dP}{dV}$?

Cuando $V = 10\,l$, la derivada vale $\dfrac{dP}{dV} = -0.48\frac{atm}{l}$. Usando este dato, describan el comportamiento aproximado de la presión ante un pequeño aumento del volumen.

ACTIVIDAD 3.2.1.3. ¿Es correcto decir que una derivada es un cociente de diferenciales? ¿Por qué?

3.3 Función derivada

Contenidos de esta sección: dominio de derivabilidad y función derivada.

3.3.1 Dominio de derivabilidad y función derivada

En la sección 3.1 hemos discutido la **derivada de una función en un punto**. En general, una función puede ser derivable en distintos puntos de su dominio y no ser derivable en otros. Siempre será importante distinguir en qué puntos una función es derivable, y en qué puntos no lo es.

Para referirnos a un conjunto de valores de la variable independiente donde una función es derivable, usaremos la expresión **derivable en un conjunto**:

> *Dada una función f y un conjunto A dentro de su dominio, se dice que es* **derivable en el conjunto** A *siempre que f sea derivable en cada punto de A.*

Recordemos que cuando decimos que f es derivable en un punto dado, asumimos que f está definida al menos en una vecindad de ese punto (es decir en el punto dado, un poco más a la izquierda y un poco más a la derecha de ese punto).

Para indicar el mayor conjunto de puntos donde una función es derivable se define el **dominio de derivabilidad**:

> *Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$, se llama* **dominio de derivabilidad** *de f al conjunto de todos los puntos de D donde la función f es derivable,*
>
> $$\mathbf{Dom} f' = \{x_0 \in D : \text{ existe } f'(x_0)\}$$

Función derivada

La derivada de una función se puede calcular en cada punto x_0 (donde exista), y en general toma distintos valores según en qué punto se calcule. Para tener un registro de los valores de la derivada en cada punto conviene definir una **nueva función** que asigne a cada número x_0 del dominio de derivabilidad el valor de la derivada $f'(x_0)$ en ese punto. Esta una nueva función se llama **función derivada**:

> *Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$, derivable en $\mathbf{Dom} f'$, se llama* **función derivada** *de f a una nueva función*
>
> $$f' : \mathbf{Dom} f' \to \mathbb{R}$$
>
> *con regla de asignación*
>
> $$x \to f'(x)$$

Según esta definición, lo que hace la función derivada es coleccionar los resultados de la derivada en distintos puntos x. Cuando evaluemos la función f' en un punto dado x_0, estaremos recuperando el valor de la derivada de f en ese punto.

> EJEMPLO 3.3.1.1. Calculemos la derivada de $f(x) = x^2$ en un punto x_0, sin especificar cuánto vale x_0 (se dice que es un punto "genérico").
>
> En primer lugar construimos el cociente incremental entre x_0 y un punto vecino $x \neq x_0$:
>
> $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{(x - x_0)}$$
>
> En la última expresión hemos factoreado para salvar la indeterminación tipo "0 sobre 0" que encontramos al buscar el límite $x \to x_0$. Podemos calcular la derivada
>
> $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_o} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_o} (x + x_0) = 2x_0$$

Con este cálculo encontramos que la función $f(x) = x^2$ es **derivable en todo punto del conjunto** $(-\infty, +\infty)$, y que la función derivada se puede escribir como

$$f'(x) = 2x$$

Cuando interese conocer $f'(5)$, por ejemplo, en lugar de calcular el límite del cociente incremental podremos recordar la fórmula de $f'(x) = 2x$ y calcular $f'(5) = 2 \cdot 5 = 10$. Obviamente vale la pena recordar este tipo de fórmulas para ahorrarse el trabajo de calcular derivadas por definición.

A partir de este ejemplo deben recordar que "en todo el eje real, la derivada de x^2 es $2x$". En símbolos:

$$\text{en todo } \mathbb{R},\ (x^2)' = 2x$$

Actividades

Actividad 3.3.1.1. Para fijar conceptos, repasen:

- ¿A qué llamamos función derivada?
- Dada una cierta función $f(x)$, ¿para qué nos sirve recordar la expresión de su función derivada $f'(x)$?

Actividad 3.3.1.2. Encuentren por definición el dominio de derivabilidad y la función derivada de $f(x) = x^3$ (pueden encontrar de utilidad el ejemplo 3.1.2.3)

GeoGebra 3.3.1.3. GeoGebra es capaz de construir la función derivada de cualquier función que hayan definido. La notación es la misma que usamos en papel: si tienen definida una función $f(x)$, para construir su función derivada deben escribir en la línea de entrada

```
f'(x)
```

En la Vista Algebraica verán la expresión de $f'(x)$, y en la Vista Gráfica verán la gráfica que da los valores de $f'(x)$ en cada punto x.

También se puede calcular la derivada en un punto determinado, digamos $x = 4$. Para eso deben escribir

```
f'(4)
```

GeoGebra calcula un número, lo guarda en su memoria con un nombre asignado automáticamente, y lo muestra en la Vista Algebraica . El número se puede usar luego en otros cálculos, como un dato conocido.

Para practicar pueden controlar nuestro resultado en el ejemplo 3.3.1.1. Y en adelante podrán controlar las derivadas que hagan a mano.

GeoGebra 3.3.1.4. Consideren la función dada por la fórmula $y(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$ y calculen la función derivada $y'(x)$.

Grafiquen en un mismo sistema de ejes la función y su función derivada. Observen:

- si donde la gráfica de $y(x)$ tiene recta tangente horizontal, encuentran que la gráfica de $y'(x)$ corta al eje x.
- si donde la función es creciente, encuentran que la gráfica de la función derivada está por encima del eje x.
- Ahora miren dos puntos del eje x donde la función sea creciente. ¿Es cierto que donde la curva es más empinada la función derivada toma un valor más grande?
- Repitan la comparación con otro par de puntos.

GeoGebra 3.3.1.5. Construyan con GeoGebra la recta tangente y la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = \cos x$ en el punto de abscisa $x_0 = \pi/4$. Para ello, calculen primero las coordenadas del punto de tangencia, la pendiente de la recta tangente, y con esos datos escriban la ecuación de las rectas.

Podrán verificar gráficamente que las rectas calculadas sean la tangente y la normal en el punto indicado.

3.4 Reglas prácticas para el cálculo de derivadas

Contenidos de esta sección: tabla de derivadas básicas. Álgebra de derivadas: reglas de derivación para la suma, producto, cociente y composición de funciones derivables. Derivadas laterales para dominios con extremos cerrados y funciones definidas a trozos.

La noción de derivada tiene muchas aplicaciones importantes, tanto que varias ramas de las Ciencias Exactas no se habrían desarrollado sin ella. En adelante necesitarán calcular derivadas con frecuencia, quizás todos los días.

Si bien las derivadas se pueden calcular por definición, tomando el límite del cociente incremental, es mucho más eficiente recordar la función derivada de algunas funciones sencillas y utilizar reglas prácticas para funciones más elaboradas, que se puedan descomponer como operaciones entre funciones sencillas. Como les habrá sucedido con las tablas de multiplicar en la escuela, necesitarán un poco de memoria y mucha ejercitación para aplicar con seguridad las reglas de derivación. En esta sección trabajaremos esas reglas.

3.4.1 Tabla de derivadas básicas

Para calcular derivadas, en la práctica recordaremos las fórmulas de las funciones derivadas de ciertas funciones sencillas y algunas reglas para construir derivadas de funciones más elaboradas.

El primer paso es entonces construir una tabla con el dominio de derivabilidad y la fórmula de la función derivada de las funciones más básicas. Por supuesto, cada una de estas funciones derivadas se puede calcular usando la definición, es decir tomando el límite del cociente incremental alrededor de un punto x_0 genérico (como en el ejemplo 3.3.1.1). En este curso discutiremos así algunos pocos casos; en los libros de la bibliografía pueden ver los restantes. Nuestro énfasis estará en recordar la tabla de derivadas y adquirir práctica en el uso correcto de las reglas.

Como sucede con las tablas de multiplicar, cuando se las necesita uno no se detiene a pensar cómo se calcula 7×8, simplemente recuerda que da 56. Esta memorización resulta útil porque uno sabe **qué significa** multiplicar y **cuándo hay que hacerlo**. Ustedes deben ahora memorizar la tabla de derivadas básicas, y **saber cuándo y cómo utilizarlas**.

Función constante

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con regla de asignación $f(x) = c$, donde c es un número dado, se encuentra que es derivable en todo $\mathbb{R}$ y que $f'(x) = 0$.

Este primer resultado es fácil de demostrar: para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0$$

Conviene recordar como regla que

$$\boxed{\textit{en todo } \mathbb{R}, \qquad (c)' = 0}$$

Función identidad

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con regla de asignación $f(x) = x$, se encuentra que es derivable en todo $\mathbb{R}$ y que $f'(x) = 1$. Este resultado también es fácil de demostrar: para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Conviene recordar como regla que

$$\text{en todo } \mathbb{R}, \quad (x)' = 1$$

Función potencia de exponente natural

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con regla de asignación $f(x) = x^n$, donde n es un número natural, se encuentra que es derivable en todo $\mathbb{R}$ y que $f'(x) = nx^{n-1}$.

Conviene recordar como regla que

$$\text{en todo } \mathbb{R}, \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

En palabras se suele decir que "se baja el exponente multiplicando y se le resta 1 al exponente original". Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, tenemos que $f'(x) = 2x^1 = 2x$. Comparen con el cálculo hecho por definición en el ejemplo 3.3.1.1.

Funciones raíz de índice natural n

Comencemos con la raíz cuadrada:

Dada $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ con regla de asignación $f(x) = \sqrt{x}$, se encuentra que es derivable en $(0, +\infty)$ y que en ese dominio $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Conviene recordar como regla que

$$\text{solamente para } x > 0, \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

En $x_0 = 0$, que es un extremo cerrado del dominio, se puede analizar solo la derivada por derecha. Ya lo hemos hecho en el ejemplo 3.1.2.2, encontrando que la derivada lateral por derecha no existe en ese punto.

Sigamos con la raíz cúbica:

Dada $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ con regla de asignación $f(x) = \sqrt[3]{x}$, se encuentra que es derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ y que en ese dominio $f'(x) = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$. Noten que $\sqrt[3]{x}$ está definida y es continua en $x_0 = 0$, pero no es derivable en ese punto. Se puede analizar la existencia de la derivada tanto por derecha como por izquierda de 0 y se encuentra que el límite del cociente incremental no existe, porque por ambos lados tiende a $+\infty$.

En general:

Si n es par la función $f(x) = \sqrt[n]{x}$ tiene dominio $[0, +\infty)$ y es derivable en $(0, +\infty)$ pero no en $x = 0$.

En cambio, si n es impar la función $f(x) = \sqrt[n]{x}$ tiene dominio $(-\infty, +\infty)$ y es derivable en todo punto real menos en $x = 0$.

Para recordar más fácil estas fórmulas conviene escribir las raíces n-ésimas como potencias de exponente fraccionario $1/n$:

$$\text{dada } f(x) = \sqrt[n]{x} \equiv x^{1/n} \text{ donde existe la derivada vale } f'(x) = \tfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

Conviene resumir lo discutido como una regla que cubra todas las raíces de índice natural n:

$$\text{solamente para } x > 0 \text{ si } n \text{ es par, y para todo } x \neq 0 \text{ si } n \text{ es impar,}$$
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' \equiv \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

Usando la notación de exponente fraccionario se puede decir, igual que con las potencias de exponente natural, que "se baja el exponente $1/n$ multiplicando y se le resta 1 al exponente original".

EJEMPLO 3.4.1.1. Calculemos con esta regla la función derivada de $\sqrt[3]{x}$: siendo 3 impar, la derivada existe en todo $x \neq 0$ y se expresa

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$$

Función recíproca

Dada $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ con regla de asignación $f(x) = \frac{1}{x}$, se encuentra que es derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ y que $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Este resultado se puede obtener fácilmente por definición: para cualquier $x_0 \neq 0$,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{x x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-1}{x x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

Conviene recordar como regla que

$$\boxed{\text{en } \mathbb{R} - \{0\}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

Función potencia de exponente natural negativo

Dada $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ con regla de asignación $f(x) = \frac{1}{x^n}$, donde n es un número natural, se encuentra que es derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ y que $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.

Si escriben $f(x) = 1/x^n$ como $f(x) = x^{-n}$ pueden ver que $f'(x) = -nx^{-n-1}$. Usando la notación de exponente negativo se puede decir que "se baja el exponente multiplicando y se le resta 1 al exponente", como en los casos anteriores.

Conviene recordar como regla que

$$\boxed{\text{en } \mathbb{R} - \{0\}, \quad \left(\frac{1}{x^n}\right)' \equiv \left(x^{-n}\right)' = -nx^{-n-1}}$$

EJEMPLO 3.4.1.2. Un caso particular de potencia natural negativa es la función recíproca, ya que $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Veamos que la derivada calculada con esta regla coincide con el resultado anterior, calculado por definición:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Como en este caso, verán que a veces se pueden usar distintas reglas para llegar al resultado correcto.

Con la misma regla podemos calcular, para $x \neq 0$,

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)' = \left(x^{-3}\right)' = -3 \cdot x^{-3-1} = -\frac{3}{x^4}$$

Más adelante verán que esta derivada se puede obtener de otra manera, como derivada de un cociente.

Funciones trigonométricas

Dada la función sen $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se encuentra que es derivable en todo $\mathbb{R}$ y que sen$'(x) = \cos(x)$.
Conviene recordar como regla que

$$\boxed{\text{en todo } \mathbb{R}, \quad \text{sen}' x = \cos x}$$

Noten que las funciones trigonométricas tienen notación propia. La comilla que indica la derivada se suele escribir después del nombre de la función, sin usar paréntesis.

Dada la función $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se encuentra que es derivable en todo $\mathbb{R}$ y que $\cos'(x) = -\text{sen}(x)$. Conviene recordar como regla que

$$\boxed{\text{en todo } \mathbb{R}, \quad \cos' x = -\text{sen} x}$$

Dejaremos como propuesta de actividad el cálculo de estos resultados.

Función exponencial

Dada la función $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se encuentra es derivable en todo $\mathbb{R}$ y que $\exp'(x) = \exp(x)$. Conviene recordar como regla que

$$\boxed{\text{en todo } \mathbb{R}, \quad (e^x)' = e^x}$$

Función logaritmo natural

Dada la función $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, se encuentra que es derivable en $(0, +\infty)$ y que $\dfrac{d \ln x}{dx} = \dfrac{1}{x}$. Conviene recordar como regla que

$$\boxed{\text{en } (0, +\infty), \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Observen que, aunque la expresión $1/x$ tenga sentido para $x < 0$, no representa allí la derivada de $\ln x$.

Actividades

Actividad 3.4.1.1. Para fijar conceptos, comenten la siguiente pregunta:

- ¿Vale la pena recordar una tabla de derivadas? ¿Para qué sirve?

Actividad 3.4.1.2. Calculen la función derivada de $f(x) = x^4$, y el valor de la derivada de la misma función en $x_0 = 2$.
¿Qué información obtienen de la gráfica de $y = x^4$ en el punto $(2, 16)$?
¿Cómo hubieran llegado a la misma información si no recordaban la derivada de x^n?

GeoGebra 3.4.1.3. Verifiquen con GeoGebra algunas de las derivadas que hemos presentado.

3.4.2 Álgebra de derivadas

El paso siguiente consiste en calcular las derivadas de funciones más elaboradas, reconociéndolas como operaciones entre funciones sencillas. Las funciones que manejamos en la mayoría de los modelos matemáticos se construyen como sumas, restas, productos, cocientes y/o composición de las funciones que acabamos de repasar. Eventualmente aparecerán otras funciones especiales, que habrá que estudiar en cada caso y agregar a la tabla básica.

Vamos a presentar reglas para calcular la función derivada en cada caso, precisando el conjunto de puntos donde son válidas. ¡Nunca usen una regla en un punto donde no sea válida!

Las reglas que enunciamos a continuación se demuestran calculando la derivada por definición, como el límite del cociente incremental, utilizando propiedades de los límites. A fin de ser prácticos, justificaremos las más sencillas y solo enunciaremos las demás. Pueden ver las demostraciones completas en los libros de la bibliografía.

Derivada de una constante por una función

Supongamos que la fórmula de una función se escribe como producto de una constante por una función conocida $f(x)$ en un conjunto A. Si f es derivable en A podemos calcular la derivada del producto con la siguiente regla:

> ***Derivada de una constante por una función:*** *si c es una constante y $f(x)$ es una función derivable en un conjunto A, entonces $c \cdot f(x)$ es derivable en A y su derivada vale*
> $$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$
> *Se suele decir que "la constante sale fuera de la derivada".*

Justifiquemos este resultado por definición: si llamamos $g(x) = c\, f(x)$, el cociente incremental de g alrededor de un punto $x_0 \in A$ se escribe como

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{c\, f(x) - c\, f(x_0)}{x - x_0} = c\, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Como f es derivable, existe el límite de este último cociente. Entonces

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = c \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c\, f'(x_0)$$

Ejemplo 3.4.2.1. Calculemos la derivada de $g(x) = 5x^3$. Como x^3 es derivable en todo el eje real, y $\left(x^3\right)' = 3x^2$, $g(x)$ es derivable en todo el eje real. La expresión de la función derivada es

$$g'(x) = \left(5x^3\right)' = 5\left(x^3\right)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$$

Derivada de una suma de funciones

Si una función aparece escrita como suma de dos funciones conocidas, se puede derivar con la regla siguiente:

> ***Derivada de una suma de funciones:*** *si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en un conjunto A, entonces $f(x) + g(x)$ es derivable en A y la derivada vale*
> $$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

La justificación de esta regla se puede contar en dos pasos: en primer lugar, para cualquier $x_0 \in A$, escribimos la razón de cambio como

$$\frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \frac{(f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

En segundo lugar, notamos que existe el límite para $x \to x_0$ de cada cociente por separado, ya que f y g son derivables en $x = x_0$; luego,

$$(f + g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Noten que lo mismo vale para una resta, ya que $f(x) - g(x) \equiv f(x) + (-g(x))$.

Ejemplo 3.4.2.2. Calculemos la derivada de $h(x) = x^2 + \sqrt{x}$. Como x^2 es derivable en todo el eje real pero $\sqrt{x}$ es derivable solamente en $(0, +\infty)$, tenemos que $h(x)$ es derivable solamente en $(0, +\infty)$. Allí, la expresión de la función derivada es

$$h'(x) = \left(x^2 + \sqrt{x}\right)' = \left(x^2\right)' + \left(\sqrt{x}\right)' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Derivada de un producto de funciones (regla de Leibniz)

La regla para derivar un producto es menos intuitiva, por eso requiere un esfuerzo extra de memoria:

> ***Derivada de un producto de funciones**: si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en un conjunto A, entonces $f(x)\cdot g(x)$ es derivable en A y la derivada vale*
> $$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Para no atarse a las letras f y g, se suele recordar que la derivada de un producto de funciones es "la derivada de la primera por la segunda sin derivar **más** la primera sin derivar por la derivada de la segunda". Dejamos la demostración de esta y las próximas reglas para consultar en la bibliografía.

EJEMPLO 3.4.2.3. Calculemos la derivada de $y(x) = e^x \cos x$. Como e^x y $\cos x$ son derivables en todo el eje real, tenemos que el producto es derivable en todo el eje real,

$$(e^x \cos x)' = (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' = e^x \cos x - e^x \text{sen} x$$

Derivada de un cociente de funciones

La regla para derivar un cociente es un poco más elaborada. Además, hay que tener cuidado de que el denominador no se anule.

> ***Derivada de un cociente de funciones:** si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en un conjunto A, entonces $f(x)/g(x)$ es derivable en todo número de A donde $g(x) \neq 0$. Donde $f(x)/g(x)$ es derivable, la derivada vale*
> $$(f(x)/g(x))' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Se suele recordar este resultado diciendo que la derivada de un cociente de funciones es "la derivada de la de arriba por la de abajo sin derivar **menos** la de arriba sin derivar por la derivada de la de abajo, todo sobre la de abajo al cuadrado".

EJEMPLO 3.4.2.4. Calculemos la derivada de $f(x) = \left(x^3 - 1\right)/(x+1)$. Primero vemos que $x^3 - 1$ y $x + 1$ son derivables en todo el eje real, ya que por la regla de la suma $\left(x^3 - 1\right)' = 3x^2 - 0 = 3x^2$ y $(x+1)' = 1 + 0 = 1$. Además $x + 1 = 0$ cuando $x = -1$. Por lo tanto, el cociente $f(x)$ es derivable todo el eje real excepto en $x = -1$. Donde es derivable, tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^3-1}{x+1}\right)' &= \frac{\left(x^3-1\right)'\cdot(x+1) - \left(x^3-1\right)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{3x^2(x+1) - (x^3-1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^3+3x^2+1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Derivada de una composición de funciones (regla de la cadena)

La última regla que necesitamos se refiere a hallar la derivada de una función compuesta, de la forma $y = g(f(x))$. Se la llama "**regla de la cadena**", y para enunciarla vamos a usar una letra u para la variable intermedia: digamos que $y = g(u)$, donde $u = f(x)$.

Derivada de una función compuesta: *dadas dos funciones $f(x)$ y $g(u)$, tales que f es derivable en x y que g es derivable en $u = f(x)$, entonces la función compuesta $g(f(x))$ es derivable en x, y la derivada se calcula como*

$$(g(f(x)))' = g'(u)\, f'(x)$$

donde $g'(u)$ es la derivada de g con respecto a la variable u, y **se debe reemplazar** $u = f(x)$ **después** *de calcular $g'(u)$.*

El conjunto donde $g(f(x))$ es derivable se construye en cada caso: habrá que revisar los puntos x tales que $f(x)$ sea derivable en x, tales que además $g(u)$ sea derivable en $u = f(x)$.

Para recordar la regla de la cadena se suele decir que la derivada de $g(f(x))$ es igual a "la derivada de la función de afuera evaluada en la de adentro, por la derivada de la función de adentro". En la notación presentada, f es la "función de adentro" y g es la "función de afuera".

Ejemplo 3.4.2.5. Calculemos la derivada de $f(x) = \text{sen}(2x)$.

Para empezar, reconocemos la composición de la función $2x$ con la función seno. El dominio natural de esta función son todos los números reales. La "función de adentro" $u = 2x$ es derivable para todo valor de x y la "función de afuera" $\text{sen}\, u$ es derivable para todo real u. La derivada existe entonces para todo x y se calcula como

$$f'(x) = (\text{sen}\, u)' \cdot u'(x)$$

pero hay que entender bien la notación: $(\text{sen} u)'$ es la derivada de la función seno respecto de su variable u, que debe hallarse *antes* de reemplazar $u = f(x)$, y $u'(x)$ es la derivada de la función de adentro respecto de x. Tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos u(x).u'(x) \\ &= \cos(2x)(2) \\ &= 2\, \cos(2x) \end{aligned}$$

Aplicar correctamente la regla de la cadena suele costar un poco, por lo que merece otro ejemplo. Quizás el paso que necesita más atención es reconocer la estructura de composición, identificando la "función de afuera" y la "función de adentro".

Ejemplo 3.4.2.6. Calculemos la derivada de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Para empezar, reconocemos la composición de un polinomio con una raíz cuadrada. El dominio natural de esta función es el conjunto $\{x \,:\, 1 - x^2 \geq 0\}$, es decir el intervalo cerrado $[-1, 1]$. La "función de adentro" $u = 1 - x^2$ es derivable para todo valor de x, pero la "función de afuera" $\sqrt{u}$ es derivable solo para $u \in (0, +\infty)$, o sea para $1 - x^2 > 0$. La derivada existe entonces para $1 - x^2 > 0$, o sea en el intervalo abierto $(-1, 1)$. En este dominio la expresión de la función derivada se construye como

$$f'(x) = (\sqrt{u})' \cdot u'(x)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} u'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} (0 - 2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

Recomendaciones

Con la tabla de derivadas básicas y las reglas para derivar funciones construidas mediante sumas y restas, productos, cocientes y composición deberíamos estar en condiciones de encarar el cálculo práctico de cualquier derivada que se pueda obtener por reglas.

En el resto del curso, y de sus estudios, las derivadas aparecerán permanentemente. En las materias correlativas se entiende que ustedes podrán interpretar y operar con facilidad cualquier derivada. Necesitarán mucha ejercitación para hacerlo con eficiencia y seguridad, y este es el momento de practicar y memorizar las reglas.

Como consejo para encarar el cálculo de una derivada, recomendamos que primero revisen la **estructura** de la expresión que quieran derivar. La primer pregunta que deben hacerse es ¿cuál es la operación principal[6] de la expresión: sumas y restas, o un producto de factores, o un cociente, o una composición? Según el caso, deben decidir qué regla usar.

En muchos casos tendrán que derivar funciones con una estructura que involucra varias operaciones. En esos casos hay que proceder "desde afuera hacia adentro" (como para desarmar una cebolla).

Ejemplo 3.4.2.7. Calculemos la derivada de

$$y = \cos(x+2).(x^2-2x)^2$$

En este caso, la operación principal es un producto de funciones.

Por un lado tenemos que analizar la derivada de la función compuesta $\cos(x+2)$, donde $u(x) = x+2$ es derivable para todo x y $\cos u$ es derivable para todo u. Aplicando la regla de la cadena,

$$(\cos(x+2))' = -\text{sen}(x+2).(x+2)' = -\text{sen}(x+2).(1+0)$$

en todo el eje x.

Por otro lado tenemos que derivar la función compuesta $(x^2-2x)^2$, donde $v(x) = x^2-2x$ es derivable para todo x y v^2 es derivable para todo v. Aplicando nuevamente la regla de la cadena,

$$\left((x^2-2x)^2\right)' = 2(x^2-2x)^1.(x^2-2x)' = 2(x^2-2x).(2x-2)$$

en todo el eje x.

Conociendo ahora que cada factor es derivable en todo el eje x, y habiendo calculado sus derivadas, podemos aplicar la regla del producto para escribir

$$y' = (\cos(x+2))'.(x^2-2x)^2 + \cos(x+2).\left((x^2-2x)^2\right)'$$

Reemplazando las derivadas indicadas obtenemos

$$y' = -\text{sen}(x+2).(x^2-2x)^2 + \cos(x+2).2(x^2-2x).(2x-2)$$

en todo el eje real.

Ejemplo 3.4.2.8.

La estrategia de este ejemplo es la misma, aunque resulte más largo. Tratemos de calcular la derivada de

$$f(x) = \cos\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-4}}{x^4-1}\right)$$

respecto de x.

En primer lugar, reconocemos la estructura de función compuesta, donde "la función de adentro" es un cociente. El numerador de ese cociente es a su vez una función compuesta, mientras el denominador es un polinomio. Siguiendo esta estructura, vemos que todas las operaciones se pueden calcular siempre que $x^4-1 \neq 0$. Verifiquen que el dominio natural de $f(x)$ es $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

[6] Nos referimos a la operación externa, es decir la última que hay que hacer para llegar al resultado.

Para derivar la expresión, observemos que la operación principal es una composición. El coseno es la función "de afuera", que es derivable en todo su dominio, y el argumento del coseno es la función "de adentro". Sin importar que la función de adentro se vea complicada, tenemos que aplicar la regla de la cadena. Obtenemos que

$$f'(x) = -\text{sen}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-4}}{x^4-1}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-4}}{x^4-1}\right)'$$

donde recordamos la derivada del coseno y la multiplicamos por la derivada de la función de adentro (dejando indicada la derivada esta última). Ahora tenemos que hacer la derivada que quedó indicada, y vemos que se trata de la derivada de un cociente. Copiamos la parte que ya está lista y aplicamos la regla de la derivada del cociente (dejando indicadas las derivadas necesarias):

$$f'(x) = -\text{sen}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-4}}{x^4-1}\right)\cdot\left(\frac{\left(\sqrt[3]{x^2-4}\right)'\cdot\left(x^4-1\right)-\sqrt[3]{x^2-4}\cdot\left(x^4-1\right)'}{(x^4-1)^2}\right)$$

Sucede que no conocemos al golpe de vista la derivada de $\sqrt[3]{x^2-4}$, y quizás también nos cueste la derivada de x^4-1. Por eso las dejamos indicadas para hacerlas con cuidado, en cálculos aparte. Teniendo en cuenta que $\sqrt[3]{u}$ es derivable para $u\neq 0$, y que el polinomio $u=x^2-4$ es derivable para todo x, la composición es derivable para $x^2-4\neq 0$ y vale

$$\left(\sqrt[3]{x^2-4}\right)' = \left(\left(x^2-4\right)^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\left(x^2-4\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(x^2-4\right)' = \frac{2x}{3\left(x^2-4\right)^{2/3}},\quad \text{si}\ \ u=x^2-4\neq 0$$

Por otro lado, para todo x podemos calcular

$$(x^4-1)' = 4x^3$$

Reemplazando donde estaban estas derivadas indicadas, obtenemos

$$f'(x) = -\text{sen}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-4}}{x^4-1}\right)\cdot\left(\frac{\frac{2x}{3(x^2-4)^{2/3}}\left(x^4-1\right)-\sqrt[3]{x^2-4}.4x^3}{(x^4-1)^2}\right)$$

Además de respetar el dominio $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ de $f(x)$, debemos pedir que $u=x^2-4\neq 0$, es decir $x\neq\pm 2$. Por lo tanto, el dominio de la función derivada es $(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

Además de los puntos $x=\pm 1$ donde la función no está definida (y en consecuencia no es derivable) es muy importante haber encontrado otros puntos donde la derivada no existe. Si bien en $x\neq\pm 2$ la función está definida y es continua, la función no es derivable en esos puntos.

Actividades

ACTIVIDAD 3.4.2.1. Para fijar conceptos, contesten las siguientes preguntas:

- ¿Para cuáles funciones deberían recordar la expresión de la función derivada?
- ¿Cómo deben organizar el cálculo de derivadas por reglas, cuando las funciones no se encuentran en la tabla básica de derivadas?
- ¿Qué reglas de derivación deben recordar, y cuáles son sus condiciones de aplicación? Ilustren el uso de cada una con un ejemplo.

ACTIVIDAD 3.4.2.2. Para memorizar las reglas de derivación se requiere mucha práctica. Por eso les sugerimos varios ejercicios en esta sección.

Indiquen en cada caso qué reglas de derivación encuentran apropiadas y el dominio donde pueden usarlas, y calculen la función derivada.

1. $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$
2. $f(x) = 2\sqrt{x} + 12x^3$
3. $f(x) = 3x \cos x$
4. $f(x) = x^2 e^x$
5. $y = \dfrac{5x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}$
6. $y = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{5}{x^4}$
7. $y = x^{2/3}$
8. $y = x^{3/2}$
9. $y = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ (es recomendable incorporar este resultado a la tabla de derivadas básicas)
10. $y = \dfrac{(3x-2)\, e^x}{x+1}$
11. $y = \left(x^2 + 1\right)^3$
12. $y = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$
13. $y = \operatorname{sen}(x^2)$
14. $y = \frac{e^{2x}}{x}$
15. $y = -3x \ln(3x)$
16. $y = \operatorname{senh}(x)$ (es recomendable incorporar este resultado a la tabla de derivadas básicas)
17. $y = \cosh(x)$ (ídem)

3.4.3 Derivación de funciones definidas a trozos

Las funciones derivadas que calculamos o enunciamos en la sección 3.4.1, y que recordamos como tabla de derivadas, se obtienen con una condición que dimos por asumida: la fórmula de la función que se deriva es la misma en el punto x_0 donde se calcula la derivada y en puntos vecinos, tanto a la derecha como a la izquierda de x_0. Por ejemplo, para calcular la derivada de $f(x) = x^2$ en el ejemplo 3.3.1.1, trabajamos el cociente incremental

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$$

sabiendo que $f(x) = x^2$ es una expresión válida para tomar el límite $x \to x_0$ por ambos lados.

La situación no es la misma cuando se trata de calcular la derivada de una función definida a trozos, justo en los puntos donde cambia la fórmula: se deben calcular los límites laterales por separado, cuidando de usar la expresión apropiada de la función a la izquierda o a la derecha del punto en cuestión.

Ejemplo 3.4.3.1. Estudiemos la derivada de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 4x + 4, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Para cada x_0 en el intervalo abierto $(-\infty, 2)$ la función está dada por la expresión $2x$, tanto en x_0 como alrededor de x_0. Luego podemos usar el resultado de la tabla de derivadas de la sección 3.4.1 para afirmar que

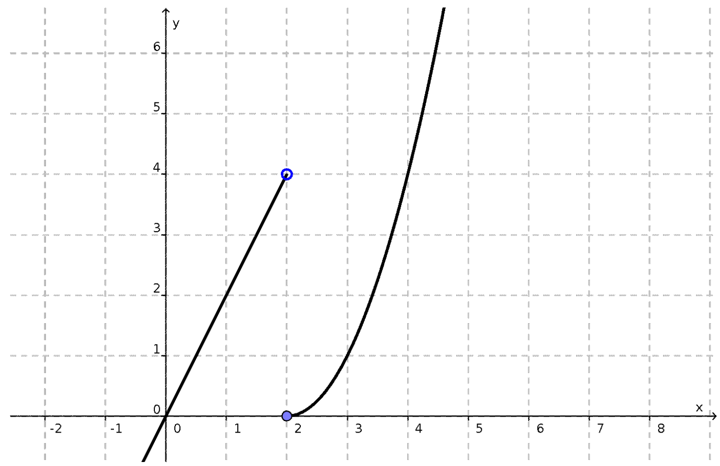
$$f'(x) = 2, \text{ si } x < 2$$

Análogamente, para cada x_0 en el intervalo abierto $(2, +\infty)$ la función está dada por la expresión $x^2 - 4x + 4$ tanto en x_0 como alrededor de x_0. Podemos usar la tabla de derivadas para afirmar que (usando el segundo renglón)

$$f'(x) = 2x - 4, \text{ si } x > 2$$

En el punto $x_0 = 2$ no podemos usar reglas porque la función sufre un cambio de fórmula. Por simplicidad, conviene primero estudiar si la función es continua: vemos que existe $f(2) = 0$ (usando el segundo renglón), que $\lim_{x\to 2^-} = 4$ (usando el primer renglón) y que $\lim_{x\to 2^+} = 0$ (usando el segundo renglón). Encontramos que $f(x)$ no es continua en $x_0 = 2$ y en consecuencia sabemos que no existe la derivada en ese punto.

Una gráfica ayuda a interpretar lo que hemos calculado:



Podemos estudiar con más detalle la existencia de derivadas laterales:

Por izquierda,

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{2x - 0}{x - 2} \to -\infty \text{ cuando } x \to 2^-$$

La derivada lateral por izquierda no existe; el cociente incremental tiende a infinito porque el numerador representa el salto de una discontinuidad finita, mientras el numerador tiende a cero.

En cambio, por derecha

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^2 - 4x + 4 - 0}{x - 2} = x - 2 \to 0 \text{ cuando } x \to 2^+$$

La derivada lateral por derecha existe y vale 0, representando una semi-recta tangente horizontal. Noten que en este cálculo tanto $f(x)$ como $f(2)$ se obtienen con la expresión $x^2 - 4x + 4$; por eso la derivada lateral por derecha coincide con la regla $\left(x^2 - 4x + 4\right)' = 2x - 4$, que en $x_0 = 2$ toma el valor 0.

Actividades

ACTIVIDAD 3.4.3.1. Dada la familia de funciones

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

donde a y b son constantes que se pueden elegir,

1. Determinen el valor de b para que la función sea continua en $x = 0$.
2. Si $b = 4$, ¿puede ser derivable $f(x)$ en $x = 0$? ¿Existen las derivadas laterales?
3. Determinen el valor de a para que exista $f'(0)$.

CAPÍTULO 4
Crecimiento y concavidad

Contenidos del capítulo: crecimiento en un punto y en intervalos. Teoremas de Rolle y del Valor Medio. Estudio del crecimiento en intervalos. Derivada segunda, concavidad y puntos de inflexión. Extremos locales y absolutos. Existencia de extremos de funciones continuas en intervalos cerrados.

4.1 Nociones de crecimiento.

Contenidos de esta sección: crecimiento en un punto. Crecimiento en intervalos.

La derivada de una función $y = f(x)$ nos permite apreciar su razón de cambio en intervalos infinitesimales. Si la derivada existe en un punto $x = x_0$ y es positiva, la información más inmediata que obtenemos es que, cuando la variable aumenta una cantidad infinitesimal a partir de x_0, el valor de la función crece en una cantidad infinitesimal. En cambio, si la derivada existe en otro punto $x = x_1$ y es negativa, sabemos que, cuando la variable aumenta una cantidad infinitesimal a partir de x_1, el valor de la función decrece en una cantidad infinitesimal.

Claro que, además del crecimiento infinitesimal, nos puede interesar recorrer todo un intervalo del dominio (típicamente de izquierda a derecha) y ver si una función crece o decrece mientras lo recorremos. En esos casos, el valor de la derivada en un punto no alcanza para predecir hasta dónde una función se mantiene creciente o decreciente. El Teorema de Rolle (demostrado en 1691) es un resultado central del Análisis Matemático que permite usar la derivada como herramienta para estudiar el crecimiento de funciones en intervalos.

En este capítulo vamos a dar precisión a estos conceptos y organizar su aplicación al estudio del crecimiento.

4.1.1 Crecimiento en un punto

La derivada de una función $y = f(x)$ en un punto x_0, que ya hemos definido como límite del cociente incremental, contiene información **local** acerca de la variación de la función alrededor de x_0: compara el valor de $f(x_0)$ con el valor $f(x)$ en puntos $x \neq x_0$ arbitrariamente cercanos, en el límite en que $x \to x_0$. Vamos a describir con precisión la información que podemos obtener cuando conocemos el valor de $f'(x_0)$ en un cierto punto. Esto nos llevará a la noción de **crecimiento en un punto**.

Consideren una función $y = f(x)$, derivable en el punto x_0 de su dominio. Según la definición vista en el capítulo 3 la función está definida en algún intervalo abierto alrededor de x_0, es decir que podemos explorar el valor de $f(x)$ a ambos lados de x_0.

Supongamos que $f'(x_0)$ es mayor que cero. Según la definición de derivada, el cociente incremental $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ se mantiene tan cerca de $f'(x_0)$ como uno quiera, para valores de $x \neq x_0$ suficientemente cercanos a x_0. Podemos afirmar entonces que cerca de x_0 este cociente se mantiene positivo:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

"Suficientemente cercanos" significa que esto sucede al menos en algún intervalo de la forma $(x_0 - r, x_0)$ a la izquierda de x_0 y en algún intervalo de la forma $(x_0, x_0 + r)$ a la derecha de x_0.

Para valores de x el intervalo $(x_0, x_0 + r)$, a la derecha de x_0, tenemos que $x - x_0 > 0$ y podemos despejar

$$f(x) - f(x_0) > 0.(x - x_0) = 0, \text{ es decir } f(x) > f(x_0)$$

Y para valores de x el intervalo $(x_0 - r, x_0)$, a la izquierda de x_0, tenemos que $x - x_0 < 0$ y encontramos al despejar

$$f(x) - f(x_0) < 0.(x - x_0) = 0, \text{ es decir } f(x) < f(x_0)$$

Llegamos a la siguiente conclusión:

Dada una función $y = f(x)$ derivable en un punto x_0, si $f'(x_0) > 0$ entonces existe un intervalo de la forma $(x_0, x_0 + r)$, a la derecha de x_0, donde

$$f(x) > f(x_0)$$

y existe un intervalo de la forma $(x_0 - r, x_0)$, a la izquierda de x_0, donde

$$f(x) < f(x_0)$$

Se dice entonces que $f(x)$ es **creciente en el punto** x_0.

Noten que la caracterización del crecimiento necesariamente involucra la comparación de los valores de la función en **puntos distintos**. La noción de función creciente en un punto x_0 involucra el valor de la función en x_0 y en puntos vecinos, pero no queda especificado hasta qué distancia r se toman esos puntos vecinos.

Análogamente, si existe $f'(x_0)$ y es menor que cero llegamos a la conclusión:

Dada una función $y = f(x)$ derivable en un punto x_0, si $f'(x_0) < 0$ entonces existe un intervalo de la forma $(x_0, x_0 + r)$, a la derecha de x_0, donde

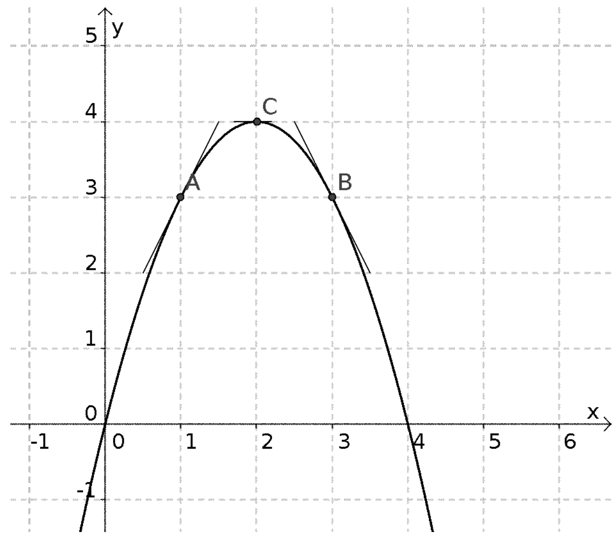
$$f(x) < f(x_0)$$

y existe un intervalo de la forma $(x_0 - r, x_0)$, a la izquierda de x_0, donde

$$f(x) > f(x_0)$$

Se dice que $f(x)$ es **decreciente en el punto** x_0.

EJEMPLO 4.1.1.1. Podemos apreciar que una función puede ser creciente en algunos puntos y ser decreciente en otros puntos donde, en un ejemplo sencillo como la función cuadrática $f(x) = -x^2 + 4x$.



Observen que $f'(1) = 2$ y la función es creciente en $x = 1$, mientras que $f'(3) = -2$ y la función es decreciente en $x = 1$. En cambio, $f'(2) = 0$ no caracteriza el crecimiento en $x = 2$.

Actividades

ACTIVIDAD 4.1.1.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes preguntas:

- ¿Se puede decidir si una función es creciente evaluándola en un solo punto?
- ¿Cómo podrían describir entonces la noción de crecimiento en un punto?

4.1.2 Crecimiento en intervalos

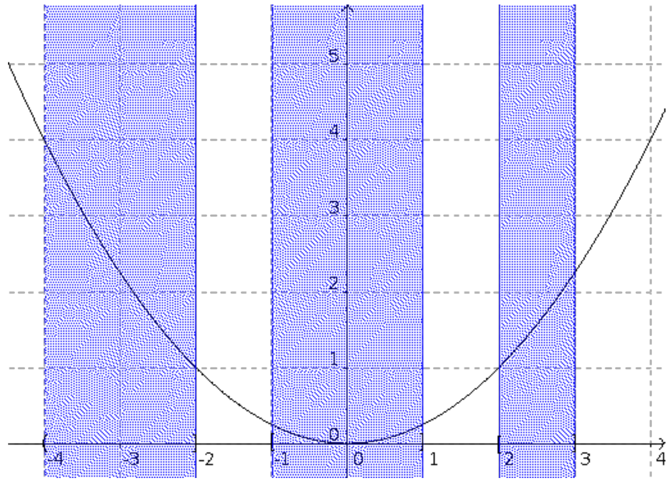
Más allá del crecimiento alrededor de un punto, es importante caracterizar el crecimiento en todo un tramo de la gráfica de una función. Para eso definimos el régimen de **crecimiento en intervalos**:

Dada una función $y = f(x)$ y un intervalo I incluido en su dominio,

- *se dice que f es* **estrictamente creciente en** I *cuando para* cualquier *par de números x_1 y x_2 de I con $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) < f(x_2)$.*
- *se dice que f es* **estrictamente decreciente en** I *cuando para* cualquier *par de números x_1 y x_2 de I con $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) > f(x_2)$.*

Gráficamente, una función $y = f(x)$ es estrictamente creciente en un intervalo cuando vemos que a valores de x más a la derecha le corresponden valores de y más altos. Y si es estrictamente decreciente, a valores de x más a la derecha le corresponden valores de y más bajos. Noten que en cierto intervalo una función podría no cumplir ninguna de estas caracterizaciones, por ejemplo cuando en el mismo intervalo hay un tramo creciente y otro decreciente.

EJEMPLO 4.1.2.1. Podemos ilustrar estos comportamientos en distintos tramos de la gráfica de una misma función, por ejemplo $f(x) = \frac{1}{4}x^2$:



Confiando en la gráfica vemos que:

- $f(x)$ es estrictamente creciente en el intervalo $[2, 3]$.
- $f(x)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(-4, -2]$.
- en cambio, en el intervalo $[-1, 1]$ la función $f(x)$ no se puede caracterizar como creciente ni como decreciente.

También se define el **crecimiento en sentido amplio**, admitiendo la posibilidad del "mayor o igual" y del "menor o igual":

Dada una función $y = f(x)$ y un intervalo I incluido en su dominio,

- *se dice que f es* **creciente en** *I cuando para cualquier par de números x_1 y x_2 de I con $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) \leq f(x_2)$.*
- *se dice que f es* **decreciente en** *I cuando para cualquier par de números x_1 y x_2 de I con $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Actividades

ACTIVIDAD 4.1.2.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes preguntas:

- ¿Qué diferencia hay entre la noción de función estrictamente creciente en un intervalo, y la noción de función creciente en sentido amplio? Den un ejemplo de cada una.

ACTIVIDAD 4.1.2.2. Usando las definiciones de crecimiento, prueben que la función $f(x) = 2 - x$ es estrictamente decreciente en todo el eje real.

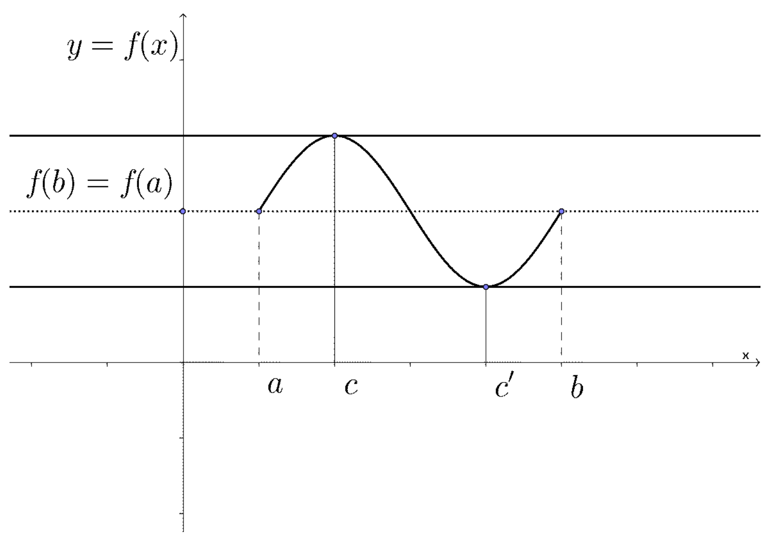
4.2 Estudio del crecimiento en intervalos

Contenidos de esta sección: Teoremas de Rolle y del Valor Medio. Aplicación al crecimiento en intervalos.

Más allá de confiar en el gráfico, para analizar justificadamente si una función es creciente o decreciente en un intervalo vamos a usar su derivada. Sin embargo, no alcanza con conocer la derivada en un punto o en algunos puntos, se requiere una herramienta más elaborada. El Teorema de Rolle y su generalización inmediata, conocida como Teorema del Valor Medio, son la llave para relacionar la derivada con condiciones que nos permitirán afirmar si una función es creciente o decreciente en un intervalo.

4.2.1 Teorema de Rolle y Teorema del Valor Medio

Comencemos planteando la situación que trata el Teorema de Rolle: imaginen la gráfica de una función $f(x)$ continua en un intervalo cerrado $[x_1, x_2]$, y derivable al menos en el intervalo abierto (x_1, x_2). Asuman además que la función toma el mismo valor en los bordes del intervalo, es decir $f(x_2) = f(x_1)$.



Si trazamos la recta secante que pasa por el punto inicial $(x_1, f(x_1))$ y el punto final $(x_2, f(x_2))$, encontramos que es **horizontal**: la razón de cambio promedio $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ es cero. Podría ser que la función crezca en algún tramo, pero entonces deberá decrecer en otro tramo para que $f(x_2) = f(x_1)$; podría que decrezca en algún tramo, pero entonces deberá volver a crecer; o podría ser simplemente una función constante.

Como la función es derivable en el intervalo abierto (x_1, x_2), existe la recta tangente en cada punto x entre x_1 y x_2. Puede ser que en algunos puntos la recta tangente tenga pendiente positiva (es decir que la función sea localmente creciente en esos puntos), y habrá otros puntos donde tenga pendiente negativa (es decir que la función sea localmente decreciente en esos puntos). Resulta intuitivo que, para compensar puntos donde la tangente tenga pendiente positiva con los puntos donde la tangente tenga pendiente negativa, en algún punto intermedio la recta tangente necesariamente será horizontal. Es decir, debe existir un valor c entre x_1 y x_2 tal que $f'(c) = 0$.

Esto es precisamente lo que afirma el siguiente teorema:

Teorema de Rolle

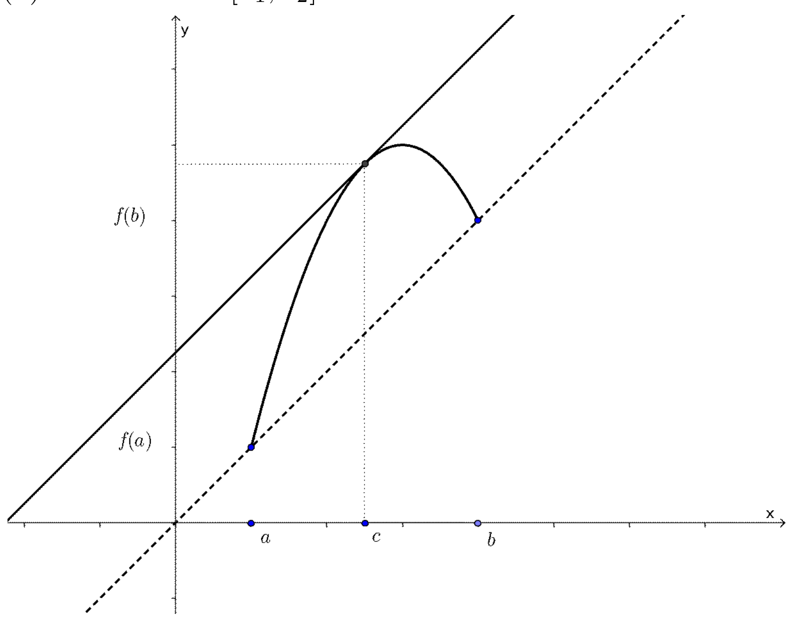
Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[x_1, x_2]$ y derivable al menos en el intervalo abierto (x_1, x_2), y además $f(x_2) = f(x_1)$, entonces existe al menos un punto c en (x_1, x_2) tal que $f'(c) = 0$.

En el gráfico de arriba vemos (punteada) la recta secante horizontal que pasa por $(x_1, f(x_1))$ y por $(x_2, f(x_2))$ y dos puntos del intervalo (x_1, x_2), que anotamos c y c', donde las rectas tangentes (en línea llena) resultan horizontales. El Teorema de Rolle no dice dónde están estos puntos. Tampoco dice si hay uno o más. Solo asegura que existe al menos uno.

El Teorema del Valor Medio

El Teorema del Valor Medio trata una situación más general, donde la función puede tomar valores distintos en los extremos del intervalo: consideren ahora la gráfica de una función $f(x)$ continua en un intervalo cerrado $[x_1, x_2]$, derivable al menos en el intervalo abierto (x_1, x_2), y esta vez con $f(x_2) \neq f(x_1)$.

El crecimiento neto de la función no es nulo: al recorrer el intervalo, la función termina en $x = x_2$ a una altura distinta que al comienzo, en $x = x_1$. La recta que secante que pasa por el punto inicial $(x_1, f(x_1))$ y el punto final $(x_2, f(x_2))$ tiene pendiente $m = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ distinta de cero. Esta pendiente es la razón de cambio promedio de $f(x)$ en el intervalo $[x_1, x_2]$.



Como la función es derivable en (x_1, x_2), existen las rectas tangentes en cada punto del intervalo abierto. Si en algún punto la recta tangente tiene mayor pendiente que la secante mencionada, en otro punto deberá compensarlo con una pendiente menor. Resulta intuitivo que, al menos en algún $x = c$ intermedio, la recta tangente debe ser paralela a la recta secante que pasa por el punto inicial y el punto final. Es decir, debe existir un valor $x = c$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Dicho de otro modo, en algún punto c de (x_1, x_2) la derivada $f'(c)$ resulta igual a la razón de cambio de f entre x_1 y x_2.

Esto es lo que afirma el siguiente teorema:

Teorema del Valor Medio

Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[x_1, x_2]$ y derivable al menos en el intervalo abierto (x_1, x_2), entonces existe al menos un punto c en (x_1, x_2) tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

En el gráfico anterior vemos un punto del intervalo (x_1, x_2), que anotamos c, donde la recta tangente en $(c, f(c))$ (línea llena) tiene la misma pendiente que la recta secante que pasa por $(x_1, f(x_1))$ y $x_2, f(x_2))$ (línea punteada). Nuevamente, el teorema no indica dónde encontramos el punto c, ni cuántos hay con las mismas características. Solo afirma que tal punto c existe.

La demostración formal del Teorema de Rolle suele no incluirse en un primer curso de Análisis Matemático, aceptaremos su validez. La demostración del Teorema del Valor Medio es una consecuencia directa del Teorema de Rolle y se deja como ejercicio opcional al final de esta clase.

Observen que la relación

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

asegurada por el Teorema del Valor Medio permite comparar $f(x_2)$ con $f(x_1)$. En la siguiente sección vamos a aprovechar esta idea para analizar el crecimiento de una función derivable en intervalos.

Actividades

Actividad 4.2.1.1. Consideren la función $f(x) = x - x^3$ en el intervalo $[0, 1]$.

Verifiquen que se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle y discutan qué se puede afirmar en consecuencia.

Encuentren el punto donde la recta tangente es horizontal. Escriban la ecuación de la recta hallada. Verifiquen graficando con GeoGebra.

Actividad 4.2.1.2. Consideren la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 1]$.

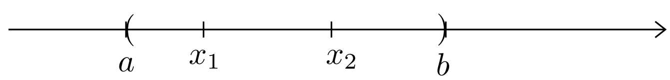
Verifiquen que se cumplen las hipótesis del Teorema del Valor Medio y discutan qué se puede afirmar en consecuencia.

Encuentren el punto donde la tangente es paralela a la recta secante que pasa por $(0, f(0))$ y por $(1, f(1))$. Escriban la ecuación de la recta hallada. Verifiquen graficando con GeoGebra.

4.2.2 Aplicación del Teorema del Valor Medio: análisis del crecimiento en intervalos

Intervalos abiertos

Para analizar el crecimiento de una función $f(x)$ en un intervalo abierto (a, b) necesitamos tomar dos puntos **cualesquiera** x_1 y x_2 de (a, b), digamos $x_1 < x_2$, y comparar $f(x_1)$ con $f(x_2)$.



- Consideremos un caso en que la función $f(x)$ sea derivable en el intervalo abierto (a, b), y además que la derivada sea positiva en todo punto de (a, b). Claro que por ser derivable, $f(x)$ también es continua en (a, b). Con los puntos x_1 y x_2 podemos construir un intervalo cerrado $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ y asegurar que $f(x)$ es continua y derivable en $[x_1, x_2]$. Visto que se cumplen las hipótesis del Teorema del Valor Medio en este intervalo cerrado, existe algún número c entre x_1 y x_2 tal que

  $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

  Podemos despejar

  $$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\, f'(c)$$

  y asegurar que el lado derecho es positivo, ya que elegimos $x_2 > x_1$ y $f'(c)$ es positiva porque $c \in (a, b)$. Así encontramos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, es decir

  $$f(x_2) > f(x_1)$$

  Como este razonamiento se aplica a cualquier par de puntos en (a, b), obtenemos la siguiente conclusión para intervalos abiertos:

Si una función $f(x)$ es derivable en un intervalo abierto (a, b), y se verifica que $f'(x) > 0$ en todo punto de (a, b), entonces $f(x)$ es **estrictamente creciente** *en (a, b).*

- Análogamente, si la derivada existe y es negativa en todo punto de (a, b), se obtiene la desigualdad

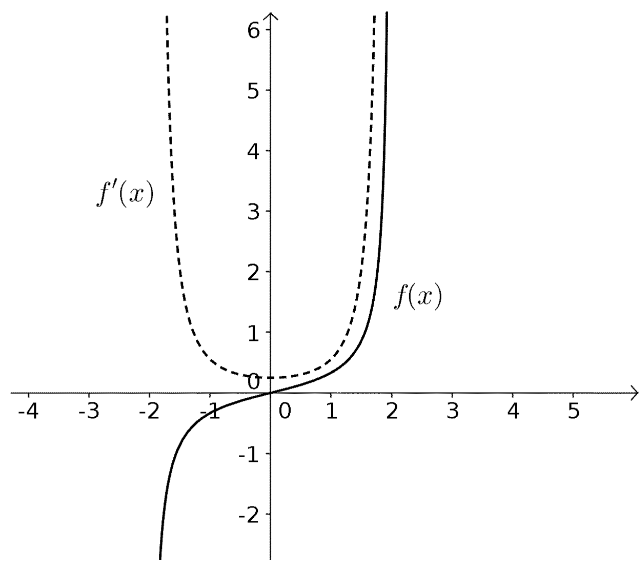
  $$f(x_2) < f(x_1)$$

  y se concluye:

Si una función $f(x)$ es derivable en un intervalo abierto (a, b), y se verifica que $f'(x) < 0$ en todo punto de (a, b), entonces $f(x)$ es **estrictamente decreciente** *en (a, b).*

En conclusión, si podemos verificar que la derivada de una función existe y mantiene su signo en todo un intervalo abierto, el Teorema del Valor Medio nos permite caracterizar la función como estrictamente creciente o como estrictamente decreciente en ese intervalo.

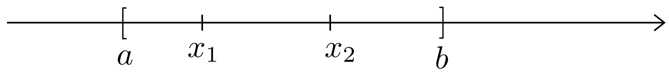
EJEMPLO 4.2.2.1. Analicemos el crecimiento de la función $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}$ en el intervalo $(-2, 2)$. En este caso $f(x)$ es derivable en el intervalo abierto, y la función derivada $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2}$ es positiva en todo el intervalo (basta ver que es un cociente de cantidades positivas). Podemos concluir que $f(x)$ es estrictamente creciente en $(-2, 2)$. Verifiquen estas afirmaciones en la gráfica, donde mostramos la función con línea llena y su derivada con línea punteada.



Intervalos cerrados o semi-cerrados

Los resultados que acabamos de obtener pueden repetirse para intervalos cerrados de la forma $[a, b]$, o a intervalos semi-cerrados de la forma $(a, b]$ o $[a, b)$, incluso con $a = -\infty$ o $b = +\infty$. En todos los casos el razonamiento sigue los mismos pasos, aplicando el Teorema del Valor Medio. La única observación nueva es que, cuando se considera un borde cerrado, las condiciones para poder aplicar el teorema piden que la función sea **derivable en el intervalo abierto** (a, b) y que sea **continua en el intervalo cerrado** (o semi-cerrado).

- Para discutir con detalle el caso de bordes cerrados, y de paso trabajar un caso con derivada negativa, consideremos una función $y = f(x)$ que sea continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable al menos en el abierto (a, b), con $f'(x) < 0$ en todo punto de (a, b). Tomamos dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 de $[a, b]$, con $x_2 > x_1$, e intentamos comparar $f(x_1)$ con $f(x_2)$.



Noten que x_1 podría coincidir con a, o bien estar dentro de (a, b); también podría darse que x_2 coincida con b o que x_2 esté en (a, b). En cualquier caso, $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ nos asegura que la función $f(x)$ es continua en $[x_1, x_2]$ y $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ nos asegura que $f(x)$ es derivable al menos en (x_1, x_2). Vemos que se cumplen las hipótesis del Teorema del Valor Medio entre x_1 y x_2 y podemos seguir un razonamiento exactamente igual al discutido más arriba: sabemos que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

para algún c entre x_1 y x_2 y despejamos

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\, f'(c)$$

Dado que $x_2 - x_1 > 0$, y que esta vez la derivada es negativa, encontramos que la diferencia
$f(x_2) - f(x_1)$ es negativa, es decir

$$f(x_2) < f(x_1)$$

La conclusión de este análisis es:

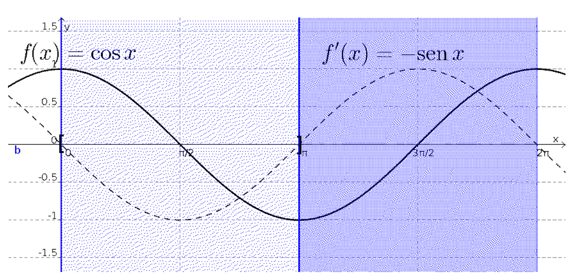
> *Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable al menos en el abierto (a, b), y se verifica que $f'(x) < 0$ en todo punto de (a, b), entonces $f(x)$ es* **estrictamente decreciente** *en todo el intervalo cerrado $[a, b]$.*

Si la derivada fuera positiva, en el análisis se cambia solo la última desigualdad y se concluye:

> *Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable al menos en el abierto (a, b), y se verifica que $f'(x) > 0$ en todo punto de (a, b), entonces $f(x)$ es* **estrictamente creciente** *en todo el intervalo cerrado $[a, b]$.*

EJEMPLO 4.2.2.2. Consideremos $f(x) = \cos x$. La función es continua y derivable en todo el eje real, y la función derivada es $f'(x) = -\text{sen} x$.

Consideremos primero el intervalo $[0, \pi]$: en las gráficas bien conocidas vemos que $f'(x) = -\text{sen} x < 0$ si $x \in (0, \pi)$ (en el intervalo $(0, \pi)$ la gráfica de $f'(x)$ está por debajo del eje de las x, es decir, es estrictamente negativa). Sin importar que la derivada no es negativa en $a = 0$ ni en $b = \pi$, el Teorema del Valor Medio nos permite asegurar que la función $\cos x$ es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$.

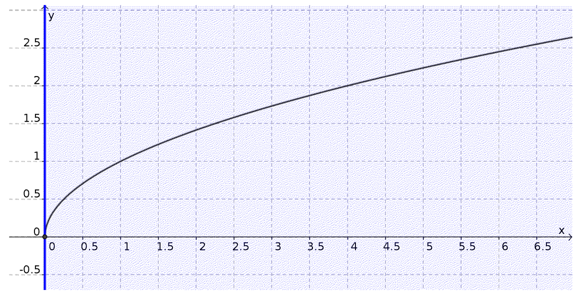


Si consideramos ahora el intervalo $[\pi, 2\pi]$, como $f'(x) = -\text{sen} x > 0$ para todos los puntos del intervalo abierto $(\pi, 2\pi)$, podemos afirmar que $\cos x$ es creciente en $[\pi, 2\pi]$.

Observen el signo de $f'(x)$ y el crecimiento de $f(x)$ en las gráficas.

EJEMPLO 4.2.2.3. Analicemos el crecimiento de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en todo su dominio natural.

El dominio de la función es el semieje real $[0, +\infty)$, donde es continua. Sabemos que $\sqrt{x}$ es derivable para $x > 0$ y que no es derivable en $x = 0$ (ni siquiera existe la derivada lateral $f'_+(0)$). Sin embargo, estas condiciones alcanzan para aplicar el Teorema del Valor Medio, cuyo enunciado pide que la función sea derivable en todos los puntos del intervalo abierto, y solo que sea continua en los puntos del borde. Como $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ es positiva en $(0, +\infty)$, la función raíz cuadrada es creciente en $[0, +\infty)$.



Crecimiento en sentido amplio

Cuando la derivada es **mayor o igual** que cero en un intervalo, la aplicación del Teorema del Valor Medio indica que hay crecimiento en sentido amplio:

> *Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable al menos en el abierto (a, b), y se verifica que $f'(x) \geq 0$ en todo punto de (a, b), entonces $f(x)$ es* **creciente** *en todo el intervalo cerrado $[a, b]$:*
> *si x_1 y x_2 están en $[a, b]$, con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$.*

Y cuando la derivada es **menor o igual** que cero, se concluye que hay decrecimiento en sentido amplio:

> *Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable al menos en el abierto (a, b), y se verifica que $f'(x) \leq 0$ en todo punto de (a, b), entonces $f(x)$ es* **decreciente** *en todo el intervalo cerrado $[a, b]$:*
> *si x_1 y x_2 están en $[a, b]$, con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Estas afirmaciones se justifican en forma análoga a las anteriores; por ejemplo, cuando $x_2 > x_1$ y $f'(x) \geq 0$ en todo punto de (a, b) la relación

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\, f'(c)$$

permite asegurar que $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Actividades

Actividad 4.2.2.1. Para fijar conceptos, elaboren la siguiente pregunta:

- ¿Qué significa que una función sea creciente (en sentido amplio) en un intervalo $[a, b]$? Justifiquen usando el Teorema del Valor Medio la siguiente afirmación que leyeron en el texto: "Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable al menos en el abierto (a, b), y se verifica que $f'(x) \geq 0$ en todo punto de (a, b), entonces $f(x)$ es creciente en todo el intervalo cerrado $[a, b]$."

Actividad 4.2.2.2. Justifiquen que las funciones exponencial natural y logaritmo natural son estrictamente crecientes en todo su dominio.

4.2.3 Recomendaciones para estudiar el signo de $f'(x)$

Como hemos visto, en el análisis de crecimiento y decrecimiento de una función resulta central distinguir dónde su derivada es positiva, y dónde es negativa. Se trata de analizar el dominio y las regiones de positividad y de negatividad de la función derivada $f'(x)$. Podemos recomendar dos estrategias prácticas para hacerlo.

En primer lugar, si es posible, recomendamos factorizar la expresión de la función derivada para analizar el signo de cada factor.

EJEMPLO 4.2.3.1. Veamos el signo de la derivada de $f(x) = e^x(x-2)$. La derivada existe en todo el eje real y está dada por

$$f'(x) = e^x(x-2) + e^x.1 = e^x(x-1)$$

Como el factor e^x es siempre positivo, el signo de $f'(x)$ está dictado por el factor $x-1$): es negativo si $x < 1$ y es positivo si $x > 1$. En consecuencia, la función $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, 1)$ y estrictamente creciente en $(1, +\infty)$.

Grafiquen para comprobar este resultado.

En segundo lugar, si la función derivada es continua, se puede utilizar una de las aplicaciones del Teorema del Valor Intermedio vista en la sección 2.3.4: si en un intervalo abierto $f'(x)$ es continua y no se anula, entonces $f'(x)$ mantiene su signo en ese intervalo. En ese caso basta evaluar $f'(x)$ en un solo punto de prueba para saber el signo en todo el intervalo. Para seguir esta estrategia deben identificar todos los puntos en que $f'(x)$ no exista, o exista pero sea discontinua, o valga cero; solo en esos puntos puede cambiar el signo de $f'(x)$, es decir puede cambiar el régimen de crecimiento.

EJEMPLO 4.2.3.2. Veamos el signo de la derivada de $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 2$, que existe en todo $\mathbb{R}$ y vale

$$\frac{dg}{dx} = 2x^3 - 2x$$

Esta función derivada es continua en todo el eje real y se anula solamente en los puntos -1, 0 y 1. En consecuencia el signo de la derivada se mantiene en los intervalos delimitados por esos puntos. Podemos evaluar $f'(x)$ en un solo punto de cada intervalo y armar la siguiente tabla:

intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
punto de prueba	-2	-0.5	0.5	2
signo de la derivada	$f'(-2) = -12 < 0$	$f'(-0.5) = 0.75 > 0$	$f'(0.5) = -0.75 < 0$	$f'(2) = 12 > 0$
régimen de crecimiento	decreciente	creciente	decreciente	creciente

Noten que también podemos factorizar $\frac{dg}{dx} = 2x\,(x-1)\,(x+1)$ y obtener los mismos resultados. Decidan cuál estrategia les resulta conveniente.

Actividades

ACTIVIDAD 4.2.3.1. Determinen los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$
2. $g(x) = 5 - |x - 5|$

4.3 Extremos locales y absolutos

Contenidos de esta sección: extremos locales. Puntos críticos para la presencia de extremos. Criterio de la derivada para extremos locales. Extremos absolutos. Extremos de funciones continuas en intervalos cerrados.

Una característica importante en la gráfica de cualquier función es la existencia de puntos de máxima altura, o de mínima altura, respecto de puntos vecinos. Su estudio está asociado a las nociones de crecimiento y decrecimiento que analizamos en la sección anterior.

4.3.1 Extremos locales en puntos interiores

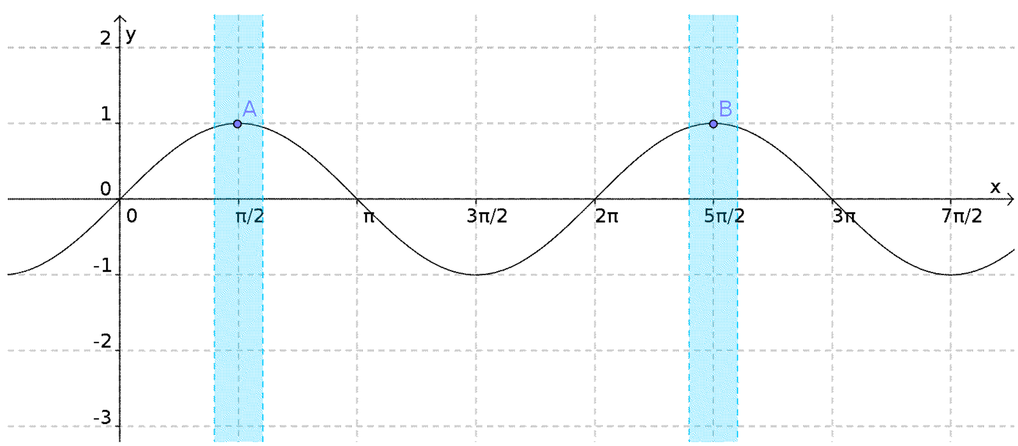
Comencemos por definir con precisión a qué nos referimos con puntos de máxima altura, respecto de puntos vecinos. Antes resulta conveniente introducir un nombre para asegurar que haya puntos vecinos: decimos que x_0 es un **punto interior** al dominio de una función $f(x)$ cuando la función está definida al menos en un intervalo abierto que contenga a x_0.

Para caracterizar un **máximo local** en un punto interior se define:

Dada una función $f(x)$ y un punto x_0 interior a su dominio, se dice que $f(x)$ tiene un **máximo local** *en x_0 cuando existe al menos un intervalo abierto que contenga a x_0 donde se verifique que $f(x_0) \geq f(x)$ para todos los puntos x de ese intervalo.*
En ese caso el valor de $f(x_0)$ se llama **valor del máximo local** *en x_0.*

EJEMPLO 4.3.1.1.

Gráficamente, la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ tiene un máximo local en $x_0 = \pi/2$. Y como es periódica de período 2π, también tiene máximos locales en $5\pi/2$, $9\pi/2$, etc. Podemos escribir la posición de todos estos máximos locales como $x_k = \pi/2 + 2k\pi$, donde k es un número entero cualquiera. El valor de todos estos máximos es 1.



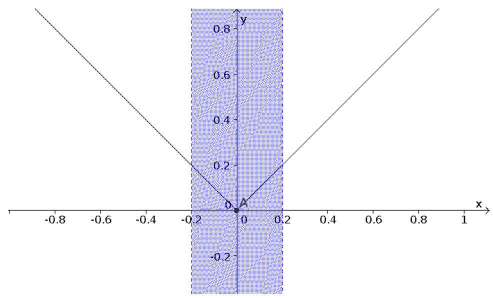
Observen en este ejemplo que en todos los máximos locales la función es derivable; además, la derivada vale cero en esos puntos.

De manera similar se precisa la idea de **mínimo local**:

Dada una función $f(x)$ y un punto x_0 interior a su dominio, se dice que $f(x)$ tiene un **mínimo local** *en x_0 cuando existe al menos un intervalo abierto que contenga a x_0 donde se verifique que $f(x_0) \leq f(x)$ para todos los puntos x de ese intervalo.*
En ese caso el valor de $f(x_0)$ se llama **valor del mínimo local** *en x_0.*

EJEMPLO 4.3.1.2. La misma gráfica del ejemplo 4.3.1.1 presenta mínimos locales: la función $f(x) = \text{sen}x$ tiene mínimos locales en $x_0 = 3\pi/2$, $7\pi/2$, $11\pi/2$, etc. Todos estos mínimos son de la forma $3\pi/2 + 2k\pi$, donde k es un número entero cualquiera. El valor de la función en todos estos mínimos es -1.

EJEMPLO 4.3.1.3. Gráficamente, la función $f(x) = |x|$ tiene un mínimo local en $x_0 = 0$.



Observen que esta función no es derivable en $x_0 = 0$.

En general se habla de **extremos locales** para referirse tanto a máximos locales como a mínimos locales. Noten que en ambas definiciones usamos desigualdades en sentido amplio ($\leq$ o $\geq$), como se hace en a mayoría de los textos de Análisis Matemático I. También se pueden definir **extremos locales estrictos** usando las correspondientes desigualdades estrictas ($<$ o $>$).

Puntos críticos de crecimiento

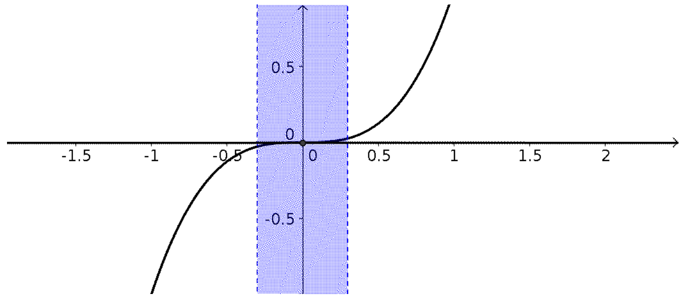
La presencia de extremos locales en puntos interiores está íntimamente relacionada con la noción de crecimiento: **naturalmente no se encuentran ni máximos ni mínimos locales en un punto donde la función sea creciente o sea decreciente**. En términos de derivadas, una función $f(x)$ no puede tener un extremo local en un punto x_0 cuando exista la derivada y sea positiva (porque en ese punto la función será estrictamente creciente), y tampoco puede tener un extremo local cuando exista la derivada y sea negativa (porque en ese punto la función será estrictamente decreciente). Por descarte, los extremos locales pueden aparecer solamente cuando la derivada no existe, o cuando existe y vale cero. Adoptamos la siguiente definición:

Puntos críticos de crecimiento

Dada una función $f(x)$, se llaman **puntos críticos de crecimiento** *de f a los puntos interiores al dominio de la función donde o bien no existe $f'(x)$, o bien $f'(x) = 0$.*
Son los únicos puntos interiores al dominio de f donde pueden encontrarse máximos o mínimos locales.

La condición de punto crítico de crecimiento **no es suficiente** para la existencia de un extremo local. En otras palabras, aunque encontremos un punto crítico de crecimiento de una función $f(x)$ en x_0, no es seguro que allí realmente haya un máximo o un mínimo local.

EJEMPLO 4.3.1.4. Analicemos esta afirmación en la función $f(x) = x^3$.
Esta función, como cualquier polinomio, está definida, es continua y es derivable en todo el eje real. Puede tener puntos críticos de crecimiento si en algún lugar resulta $f'(x) = 0$.
Planteando $f'(x) = 3x^2 = 0$ encontramos un solo punto crítico, en $x_0 = 0$.



- Observando la gráfica, ¿existe un extremo local de $f(x)$ en $x = 0$?
- ¿Basta con saber que $f'(x_0) = 0$ para responder la pregunta anterior?
- ¿Es posible entonces que en un punto de la gráfica la recta tangente sea horizontal y la función no tenga un extremo?

Condiciones suficientes para determinar la presencia de extremos locales

Para determinar si en un punto crítico de crecimiento x_0 se encuentra un máximo o un mínimo local hay que analizar el comportamiento de la función a ambos lados de x_0: necesitamos conocer el valor de $f(x_0)$, los límites laterales de $f(x)$ cuando $x \to x_0$, y el régimen de crecimiento en algún intervalo a la izquierda de x_0 y en algún intervalo a la derecha de x_0. Con esa información podremos clasificar el punto crítico como corresponda: máximo local, mínimo local o ninguno de los casos anteriores (ausencia de extremo local).

En algunas situaciones de interés práctico resulta posible asegurar la existencia de un extremo local. En primer lugar:

Si x_0 es punto crítico de crecimiento de una función $f(x)$ tal que:
- la función es continua en x_0,
- la función tiene derivada $f'(x) < 0$ en algún intervalo $(x_0 - r, x_0)$ a la izquierda de x_0,
- la función tiene derivada $f'(x) > 0$ en algún intervalo $(x_0, x_0 + r)$ a la derecha de x_0,
entonces $f(x)$ presenta un mínimo local en x_0.

Justifiquemos esta afirmación. Por ser $f(x)$ continua en $(x_0 - r, x_0]$ y tener derivada negativa en $(x_0 - r, x_0)$, la función es estrictamente decreciente en $(x_0 - r, x_0]$: para cualquier x en $(x_0 - r, x_0)$ resulta $f(x) > f(x_0)$. Y por ser $f(x)$ continua en $[x_0, x_0 + r)$ y tener derivada positiva en $(x_0 - r, x_0)$, la función es estrictamente creciente en$[x_0, x_0 + r)$: para cualquier x en $(x_0, x_0 + r)$ resulta $f(x) > f(x_0)$. Luego, para cualquier x en $(x_0 - r, x_0 + r)$ se verifica la desigualdad $f(x) \geq f(x_0)$. Esto prueba que $f(x)$ presenta un mínimo local en x_0.

Análogamente podemos probar:

Si x_0 es punto crítico de crecimiento de una función $f(x)$ tal que:
- la función es continua en x_0,
- la función tiene derivada $f'(x) > 0$ en algún intervalo $(x_0 - r, x_0)$ a la izquierda de x_0,
- la función tiene derivada $f'(x) < 0$ en algún intervalo $(x_0, x_0 + r)$ a la derecha de x_0,
entonces $f(x)$ presenta un máximo local en x_0.

Estos enunciados se conocen como **criterio de la derivada**[1] para la existencia de un extremo local. Los podemos recordar en palabras:

- si en un punto crítico de crecimiento x_0 una función es continua y pasa de ser decreciente a ser creciente, presenta un mínimo local.
- si en un punto crítico de crecimiento x_0 una función es continua y pasa de ser creciente a ser decreciente, presenta un máximo local.

[1]También conocido como criterio de la derivada primera, porque más adelante hablaremos de derivada segunda.

EJEMPLO 4.3.1.5. En el ejemplo 4.3.1.3 graficamos la función $f(x) = |x|$. Más allá del gráfico, podemos justificar que tiene un mínimo local en $x_0 = 0$: tiene un punto crítico en $x_0 = 0$ porque allí no existe la derivada, y podemos aplicar el criterio de la derivada primera, porque la función es continua en 0 y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, con

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como la función es continua y pasa de tener derivada negativa a tener derivada positiva, queda justificado que tiene un mínimo local en $x_0 = 0$.

Actividades

ACTIVIDAD 4.3.1.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes consignas:

- ¿Qué condiciones se deben cumplir para que una función tenga un máximo local en cierto punto x_0? Propongan una función cuadrática que tenga un máximo local en $x_0 = 2$ y verifiquen que cumpla esas condiciones.
- ¿Puede cambiar el régimen de crecimiento de una función (por ejemplo pasar de decreciente a creciente) en un punto del eje real que no sea lo que hemos llamado punto crítico de crecimiento? Den un ejemplo.
- Una función constante $f(x) = k$, ¿tiene máximos locales? ¿Cuáles son?
- Justifiquen sin usar derivadas que la función $f(x) = x^2$ tiene un mínimo local estricto en $x = 0$.

ACTIVIDAD 4.3.1.2. En un experimento se hace correr a un ratón de laboratorio en una rueda, y se mide la cantidad de calorías $C(t)$ que va quemando en función del tiempo t. Se encuentra que las calorías consumidas al cabo de t minutos se pueden describir con la función

$$C(t) = C_0 \left(1 - e^{-t/T}\right) - v\, t\, e^{-t/T}$$

donde las constantes valen $C_0 = 10\, cal$, $v = 0.5\, \frac{cal}{min}$ y $T = 20\, min$.

- Escriban la velocidad con que el ratón quema de calorías en función del tiempo. ¿En qué unidades expresan el resultado?
- Indiquen en qué intervalo de tiempo la velocidad con que quema de calorías es creciente, en qué intervalo de tiempo es decreciente, y en qué momento es máxima.
- ¿Pueden dar una interpretación fisiológica razonable de este comportamiento?

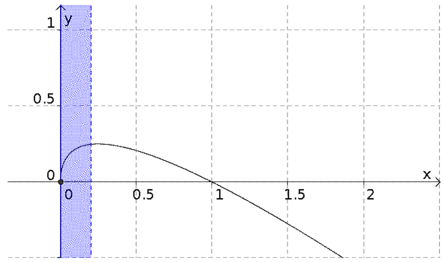
ACTIVIDAD 4.3.1.3. Encuentren los puntos críticos de crecimiento de la función $f(x) = x^3$. ¿Tiene algún extremo local?

Grafiquen con GeoGebra para apreciar la situación.

4.3.2 Extremos locales en bordes del dominio

Hasta ahora estudiamos con cuidado puntos interiores al dominio de una función. Los extremos locales pueden aparecer también cuando el dominio de la función incluye intervalos con bordes cerrados.

EJEMPLO 4.3.2.1. Observen la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x} - x$.



El dominio de esta función es el intervalo $[0, +\infty)$, y el valor de la función en el borde $x_0 = 0$ es menor que en los puntos vecinos sombreados. Se trata de un mínimo local que se encuentra en un punto que no es interior al dominio de la función, sino que es un punto de borde cerrado del dominio.

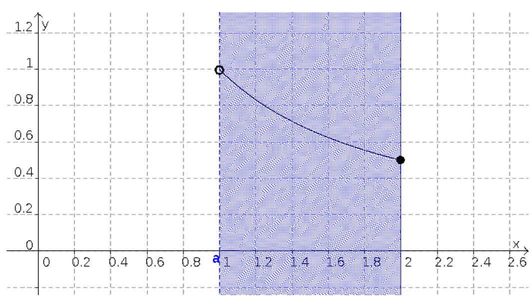
Corresponde adaptar las definiciones anteriores de extremos locales para caracterizar los máximos y mínimos ubicados en bordes de intervalos cerrados. La idea en todos los casos es que se compare el valor $f(x_0)$ con los vecinos de un solo lado, el que queda dentro del dominio. Las adaptaciones resultan muy razonables: los enunciados son similares al caso de puntos interiores, con el cuidado de referirse solo al comportamiento lateral del lado correcto.

En vez de escribir todo este detalle, nos parece conveniente que hagan las adaptaciones cada vez que las necesiten. Los dejamos con la siguiente afirmación:

Cuando el dominio de una función incluye puntos de borde de intervalos cerrados, las definiciones de extremo local se pueden adaptar, con el cuidado de referirse sólo al **comportamiento lateral** *del lado adecuado.*

Para asegurar la existencia de un extremo local en un borde cerrado del dominio hay que conocer el valor de la función en el punto, el régimen de crecimiento y, si no es continua en dicho borde, el límite lateral de la función por el lado interno del dominio.

EJEMPLO 4.3.2.2. Analicemos la función $f(x) = 1/x$, restringida al intervalo $(1, 2]$



- vemos que es continua por izquierda en $x_0 = 2$, ya que $\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = 0.5$.
- es derivable en $(1, 2)$, con $f'(x) = -1/x^2 < 0$.
- luego es decreciente en $(1, 2]$: para todo x en $(1, 2]$ se verifica que $f(x) \geq f(2)$.

En conclusión, $f(x)$ tiene un mínimo local en $x_0 = 2$, con valor $f(2) = 0.5$.

Notemos además que el borde izquierdo del dominio es abierto: el punto 1 no pertenece al dominio. Es decir, no existe $f(1)$. Aunque sospechen la presencia de un máximo local, no lo hay: no puede haber un extremo local donde la función no está definida.

Actividades

Actividad 4.3.2.1. Para fijar conceptos, consideren la función $y = x - 1$ definida solamente en el intervalo $[0, 5)$ y elaboren las siguientes preguntas:

- ¿Tiene puntos críticos esta función?
- ¿Tiene algún mínimo local?
- ¿Tiene algún máximo local?

Actividad 4.3.2.2. Exploren los extremos locales de la función $f(x) = |1 - x^2|$. Para eso, primero identifiquen su dominio y sepárenlo en intervalos para resolver el valor absoluto.

4.3.3 Extremos absolutos

Una aplicación importante del estudio de funciones es el problema de **optimización**: hallar el valor de una variable tal que una cantidad de interés tome el valor máximo posible, o mínimo posible, dentro de cierto dominio. Por ejemplo, si describimos con una función la pureza de un preparado químico, querremos que sea máxima. O si describimos con otra función el nivel de radiaciones nocivas de un equipo médico, querremos que sea mínima. Además, en situaciones reales podremos mover las variables en cierto rango acotado; en general querremos encontrar la solución óptima dentro de ese rango.

En el lenguaje de funciones vamos a hablar de **máximos absolutos** y **mínimos absolutos** de una función en un dado dominio. Las definiciones precisas son:

> *Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$, se dice que $f(x)$ tiene un* **máximo absoluto** *en D cuando existe un número $c \in D$ tal que para todo x en D resulta $f(x) \leq f(c)$.*

En ese caso, se dice que la función f presenta un máximo absoluto en $x = c$, con valor $f(c)$.

Análogamente,

> *Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$, se dice que $f(x)$ tiene un* **mínimo absoluto** *en D cuando existe un número $d \in D$ tal que para todo x en D resulta $f(x) \geq f(d)$.*

En ese caso, se dice que la función f presenta un mínimo absoluto en $x = d$, con valor $f(d)$. Se usa el término **extremo absoluto** para referirse a cualquiera de los dos casos.

Para encontrar extremos absolutos, según estas definiciones, es necesario comparar los valores de $f(x)$ en **todos** los puntos del dominio. Para hacerlo con certeza resultan necesarias todas las herramientas que hasta aquí hemos desarrollado. Conviene organizar una estrategia para determinar si una función tiene extremos absolutos, y dónde se presentan; sugerimos que:

- analicen las discontinuidades de la función.
- analicen los intervalos de crecimiento, con las estrategias de la sección anterior.
- determinen los extremos locales en puntos interiores al dominio.
- revisen el comportamiento de la función en cada extremo de los intervalos de crecimiento (es decir, en cada punto crítico y en cada discontinuidad o borde del dominio):
  - si la función es continua, deben evaluarla en esos puntos.
  - si la función no es continua, deben evaluar la función (si estuviera definida) y los límites laterales.
- con esta información, esbocen una gráfica esquemática y determinen si existen extremos absolutos.

> Ejemplo 4.3.3.1.
> Busquemos los extremos absolutos de $f(x) = \frac{4}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - x$ en el intervalo cerrado $[-1, 1]$.
> La función, por ser un polinomio, es derivable en todos los puntos interiores al dominio dado, es decir en $(-1, 1)$. En este caso no es necesario partir el dominio en puntos donde la derivada no exista.

La derivada $f'(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1$ es continua y se anula en $x_1 = -1/2$ y en $x_2 = 3/2$. Debemos partir el dominio en el punto crítico $x_1 = -1/2$; el otro punto está fuera del dominio de interés.

La tabla de regiones de crecimiento se puede armar así:

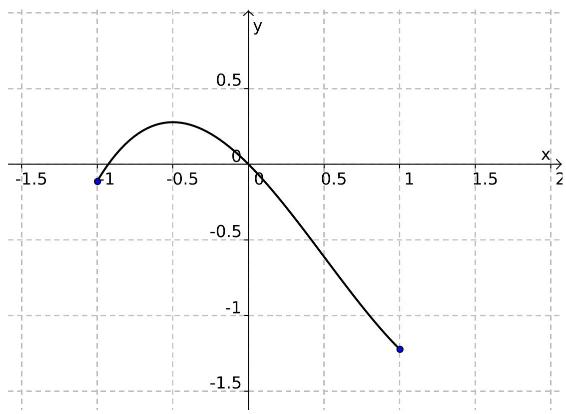
intervalos	$(-1, -1/2)$	$(-1/2, 1)$
punto de prueba	$-3/4$	0
signo de la derivada	$f'(-3/4) = 3/4 > 0$	$f'(0) = -1 < 0$
régimen de crecimiento	creciente	decreciente

Evaluamos los extremos de los intervalos de crecimiento:

- en $x_0 = -1$ la función es continua por derecha. Como la función es creciente a la derecha de x_0, tenemos un mínimo local, con valor $f(-1) = -1/9$.
- en $x_1 = -1/2$ la función es continua. Como la función pasa de creciente a decreciente, tenemos un máximo local, con valor $f(-1/2) = 5/18$.
- en $x_2 = 1$ la función es continua por izquierda. Como la función es decreciente a la izquierda de x_2, tenemos un mínimo local, con valor $f(1) = -11/9$.

Con estos puntos y la información del crecimiento se puede esbozar la gráfica a mano y, a partir de ella, comprobar que la función tiene un máximo absoluto en $x_1 = -1/2$ y un mínimo absoluto en $x_2 = 1$.

Agreguemos la gráfica hecha con GeoGebra, para chequear nuestros resultados:



La existencia de un máximo absoluto o de un mínimo absoluto en un dado dominio en general no está garantizada. En el ejemplo anterior 4.3.3.1 sí encontramos máximo y mínimo absoluto. En cambio, en el ejemplo 4.3.2.2 hay un mínimo absoluto, pero no hay máximo absoluto. Y en el ejemplo 4.3.2.1 hay un máximo que es local y absoluto y un mínimo que es local pero no absoluto. Obviamente no conviene memorizar todas estas posibilidades, sino analizar cada caso en particular.

Afortunadamente la situación es mucho más previsible cuando se trata de funciones continuas en intervalos cerrados. Intuitivamente, el trazo de una función continua se hace sin levantar el lápiz; al recorrer un dominio tipo intervalo cerrado, los valores de la función barren una imagen que resulta un intervalo cerrado en el eje de ordenadas, pasando por algún punto que es el más bajo del recorrido y por otro punto que es el más alto del recorrido.

Esta intuición es correcta, y se formaliza con el siguiente teorema:

Teorema del Valor Extremo

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces alcanza tanto un mínimo como un máximo absolutos en ese intervalo.

Este enunciado sencillo tiene una demostración delicada. Al igual que el Teorema del Valor Intermedio, se basa en la continuidad y en la noción de que los números reales cubren la recta (en este caso el eje vertical) sin dejar huecos.

El Teorema del Valor Extremo no nos dice dónde se presentan los extremos absolutos de funciones continuas en intervalos cerrados, sólo asegura que existen. Para encontrarlos se puede aprovechar que no hay discontinuidades ni bordes abiertos y seguir una estrategia particular:

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, para hallar un mínimo y un máximo absolutos en ese intervalo:

- encuentren los valores de $f(x)$ en los puntos críticos,
- calculen los valores $f(a)$ y $f(b)$,
- el mayor de los valores hallados es el máximo absoluto, y el menor de los valores hallados es el mínimo absoluto.

> EJEMPLO 4.3.3.2. Revisen el ejemplo 4.3.3.1, en el que hemos estudiado con cuidado el crecimiento y los extremos locales de una función continua en un intervalo cerrado. Verán que el máximo y el mínimo absoluto existen, y corresponden al mayor y menor valor mencionados en la estrategia anterior.

Actividades

ACTIVIDAD 4.3.3.1. Consideren la función $f(x) = 4 - x^2$ en el intervalo $[-3, 1]$.

- ¿Se aplica el Teorema del Valor Extremo?
- Encuentren el valor máximo absoluto y el valor mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[-3, 1]$.

ACTIVIDAD 4.3.3.2. Exploren si hay extremos absolutos en las siguientes funciones:

- $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1, & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$
- $g(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

¿Algún caso contradice el Teorema del Valor Extremo?

4.3.4 Aplicación: problemas de optimización

Los métodos para hallar valores extremos aprendidos en la sección 4.3.3 tienen aplicaciones prácticas en muchas áreas. Por ejemplo, podemos resolver problemas de maximizar superficies, volúmenes o utilidades, y minimizar distancias, tiempos o costos. En la solución de esos problemas prácticos, el desafío es convertir el problema que está descripto en palabras en un planteo matemático de optimización, es decir, reconocer las variables apropiadas, la función que debe maximizarse o minimizarse, y el dominio donde esta función representa al problema.

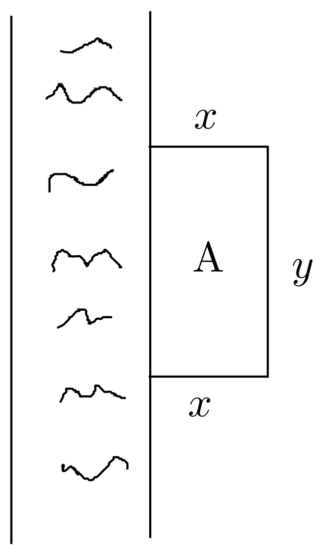
Como consejos prácticos, podríamos enunciar los siguientes pasos:

- Es necesario entender la situación planteada y generar una representación propia del problema. En general se trata de una familia de posibilidades entre las cuales elegir; intenten visualizar esas posibilidades. Puede ser útil diseñar dibujos y elegir una notación significativa para las cantidades relevantes (por ejemplo, A para un área, h para una altura o t para el tiempo).
- Reconozcan las relaciones entre las distintas cantidades relevantes y escríbanlas en forma de ecuaciones. Identifiquen la cantidad que se intenta optimizar y una variable que describa la familia de posibilidades.

- Construyan una función para expresar la cantidad que se intenta optimizar en términos de variables. Si quedó escrita en términos de más de una variable, utilicen las relaciones entre estas variables para reemplazarlas en términos de una sola.
- Identifiquen el rango en que se mueve esa variable para recorrer toda la familia de posibilidades del problema. Ese rango será el dominio de la función construida.
- Una vez que está definida la función y su dominio, pueden aplicar todos los métodos estudiados para hallar el extremo buscado.
- Finalmente, podrán dar una respuesta a las preguntas del problema. No olviden hacerlo en forma clara, que sea legible sin necesidad de seguir todo el desarrollo.

EJEMPLO 4.3.4.1. Un granjero tiene $2400\,m$ de alambre para cercar un campo rectangular que limita con un río recto. No necesita cercar a lo largo del río. ¿Cuáles serán las dimensiones óptimas del campo para que la superficie cercada sea la más grande posible? ¿Qué superficie queda encerrada por el alambre?

Para resolver este problema, conviene hacer primero un gráfico y describir la información que tenemos. En este caso podemos llamar (por ejemplo) x a la longitud del lado perpendicular al río, y a la longitud del lado paralelo al río y A al área de la superficie cercada. Los distintos terrenos posibles se encuentran variando la longitud de los lados x e y, utilizando la longitud total de alambre disponible.



Observamos las siguientes relaciones:

- el área A de un rectángulo se calcula como "base por altura". En forma de ecuación,

$$A = xy$$

- los $2400\,m$ de alambre se usarán en dos lados perpendiculares al río y un lado paralelo al mismo. En forma de ecuación, los lados x e y están relacionados por

$$2x + y = 2400\,m$$

La cantidad que se intenta maximizar es el área A, que depende de x y de y. Para escribirla en función de una sola variable podemos usar la relación entre x e y para despejar y reemplazar una de las variables, por ejemplo $y = 2400\,m - 2x$. El área queda escrita como una función de la longitud x:

$$A(x) = x(2400\,m - 2x).$$

Es fundamental reconocer el dominio de la función en el marco del problema. La variable x representa una longitud, por lo que debe cumplir $x \geq 0$, y debe ser compatible con la longitud del alambre. La variable

$y = 2400\,m - 2x$ también representa una longitud: esto implica $2400\,m - 2x \geq 0$, de donde obtenemos que $x \leq 1200\,m$.

Una vez que tenemos la función construida puede resultarles conveniente no anotar las unidades (recordando que todas las longitudes están en metros). El problema matemático que queda planteado es hallar el máximo de la función

$$A(x) = 2400x - 2x^2 \qquad \text{en el dominio} \qquad [0, 1200]$$

Dado que se trata de una función continua en un intervalo cerrado, el máximo absoluto existe. La solución del problema matemático indica que el máximo se encuentra en $x = 600$.

La respuesta a la pregunta inicial es que las dimensiones óptimas del campo son $600\,m$ para cada lado perpendicular al río y $1200\,m$ para el lado paralelo al río, cubriendo una superficie de $720000\,m^2$.

Actividades

ACTIVIDAD 4.3.4.1. Se diseña la fabricación de una lata para galletitas, usando una plancha de hojalata de 50 cm x 50 cm. La base debe ser cuadrada, pero no se especifica su tamaño. Los lados se obtienen plegando la hojalata restante hacia arriba. La tapa será de plástico.

- Construyan una expresión para representar el volumen de la lata en función de la longitud de los lados de la base. Identifiquen el dominio adecuado al problema.
- Estudien si el volumen aumenta o disminuye al aumentar la base.
- ¿Qué dimensiones debe tener la lata para que su volumen sea el mayor posible?
- ¿Qué superficie tendría la tapa de plástico en ese caso?

ACTIVIDAD 4.3.4.2. Usando funciones podemos encarar problemas de Geometría. Por ejemplo:

Encuentren el punto de la parábola $y^2 = 2x$ que se encuentre más cercano al punto $(1, 4)$.

Sugerencia: escriban una fórmula para calcular la distancia entre un punto cualquiera (x, y) de la parábola y el punto $(1, 4)$. Luego busquen el mínimo de esa función.

4.4 Concavidad y derivada segunda

Contenidos de esta sección: cambios en el ritmo de crecimiento. Concavidad y derivada segunda. Puntos de inflexión.

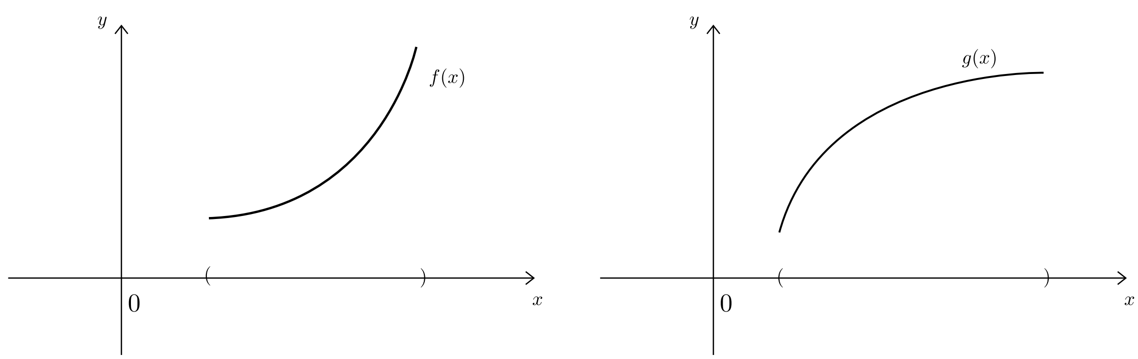
La derivada de una función $y = f(x)$ en un punto x_0 mide el ritmo de crecimiento local de una función. Excepto en el caso de funciones lineales, este ritmo de crecimiento es variable, es decir cambia según el punto que se considere. Resulta interesante estudiar cómo cambia el ritmo de crecimiento al mover la variable de la función. En otras palabras, interesa estudiar el crecimiento del ritmo de crecimiento.

Repitamos esta discusión desde un punto de vista geométrico: la derivada de una función en un punto mide la pendiente de la gráfica en ese punto (o dicho con más cuidado, la pendiente de la recta tangente en ese punto); si el valor de la derivada cambia al mover la variable de la función, veremos el cambio de la pendiente de la gráfica. En consecuencia, la gráfica muestra una **curvatura**.

En esta sección vamos a aprovechar el análisis de crecimiento ya desarrollado para caracterizar cómo cambia el ritmo de crecimiento de una función, que se visualiza como un cambio en la pendiente de su gráfica. Es decir, vamos a estudiar si la función derivada $f'(x)$ es creciente o decreciente, y qué consecuencias tiene esto en el aspecto de la gráfica de la función $f(x)$.

4.4.1 Concavidad

EJEMPLO 4.4.1.1. Consideren las funciones representadas en los siguientes gráficos



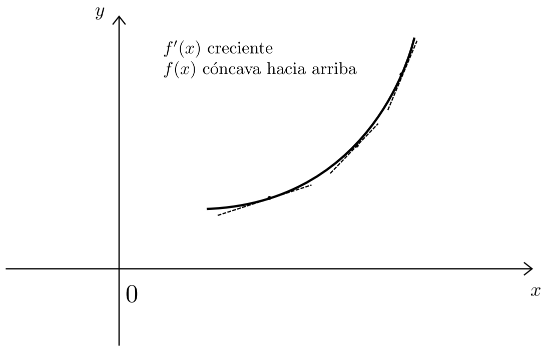
- Observen que ambas funciones son crecientes en el intervalo mostrado.
- Observen el primer caso: a medida que recorremos la gráfica, los valores de la pendiente en cada punto van aumentando. Podríamos decir entonces que la función derivada (que justamente es la que recoge los valores de las pendientes) es creciente.
- Ahora observen la segunda gráfica. En este caso, los valores de la pendiente en cada punto van disminuyendo. Podríamos decir entonces que la función derivada es decreciente.
- ¿Cuál es la consecuencia gráfica de estos comportamientos?
- Intenten una comparación similar con funciones decrecientes.

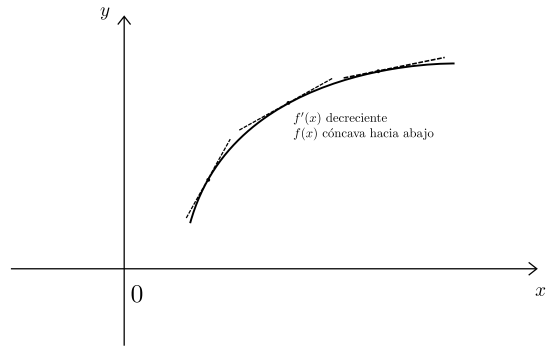
En este ejemplo aprendemos que, en general, podemos aprovechar el estudio del crecimiento de su derivada $f'(x)$ para conocer cuándo la gráfica de f se curva hacia arriba y cuándo se curva hacia abajo. Esto es lo que llamamos el estudio de la **concavidad** de una función.

Dada una función $f(x)$ derivable en un intervalo (a, b),

- *Si $f'(x)$ es creciente en el intervalo (a, b) se dice que la función es* **cóncava hacia arriba** *en dicho intervalo (lo anotaremos con el símbolo $\smile$).*
- *Si $f'(x)$ es decreciente en el intervalo (a, b) se dice que la función es* **cóncava hacia abajo** *en dicho intervalo (lo anotaremos con el símbolo $\frown$).*

Conviene volcar estos conceptos para responder las consignas del ejemplo anterior:





Observen que si la función es cóncava hacia arriba en un intervalo (a,b), para todo punto x de ese intervalo la recta tangente a la gráfica en el punto $(x, f(x))$ se ubica por debajo de la gráfica de $y = f(x)$, al menos en (a,b). De manera similar, si la función es cóncava hacia abajo en un intervalo (a,b), para todo x del intervalo la recta tangente a la gráfica en el punto $(x, f(x))$ se ubica por arriba de la gráfica, al menos en (a,b).

En general usaremos la frase **sentido de la concavidad** para indicar si la concavidad en un dado intervalo es $\smile$ o $\frown$. Dada una función $f(x)$, para identificar intervalos con sentidos de concavidad definidos necesitamos analizar los intervalos en los que la derivada $f'(x)$ sea creciente o decreciente. Y para eso necesitamos estudiar la derivada de la función derivada $f'(x)$.

Actividades

ACTIVIDAD 4.4.1.1. Para fijar conceptos, elaboren la siguiente pregunta:

- ¿Qué significa que una función sea cóncava hacia arriba en un intervalo de su dominio? Dibujen un ejemplo de una función decreciente y cóncava hacia arriba.

4.4.2 Derivada segunda

Dada una función $f(x)$, la función derivada $f'(x)$ es también una función de x. Para saber si $f'(x)$ es creciente o decreciente en un punto x_0 hay que ver si es derivable, y en ese caso estudiar su régimen de crecimiento a partir del signo de su derivada $(f'(x))'$. A la derivada en x_0 de la función derivada de $f(x)$, si es que existe, se la llama **derivada segunda** de f y se la anota como $f''(x_0)$*:*

Dada la función derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$, definida en un intervalo abierto alrededor de un punto x_0, se dice que $f(x)$ es **derivable dos veces** *en x_0 si existe el límite*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

En ese caso, se llama **derivada segunda** *de f respecto de x en el punto x_0 al valor de dicho límite,*

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

En la notación de Leibnitz la derivada segunda se escribe

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0}$$

y se lee **derivada segunda de f respecto de x dos veces** en el punto x_0.

Generalmente la derivada segunda de una función existe en todo un conjunto de puntos. Se llama **función derivada segunda** de f a la nueva función que a cada punto x_0 del dominio de f, donde exista la derivada segunda, le asigna el valor de la derivada segunda en ese punto. Se anota $f''(x)$ y se puede escribir que

$$f''(x) = \big(f'(x)\big)' = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Ahora que tenemos una derivada segunda, será conveniente en adelante llamar a $f'(x)$ **derivada primera**.

Debido a que la derivada segunda se define como un límite, por supuesto puede ocurrir que no exista. Podría suceder que sólo exista por izquierda, o sólo por derecha, o que exista por ambos lados pero con resultados distintos. En estos casos hablaremos de derivadas segundas laterales y las anotaremos como $f''_+(x_0)$ o $f''_-(x_0)$, según corresponda.

En la práctica es sencillo calcular la función derivada segunda, derivando dos veces consecutivas, siempre que las reglas de derivación lo permitan (si no se pueden aplicar reglas, habrá que recurrir al límite del cociente incremental).

> EJEMPLO 4.4.2.1. Por ejemplo, $f(x) = 3x^2 - 5x + \cos x$ es derivable en todo el eje real, y por reglas
>
> $$f'(x) = \big(3x^2 - 5x + \cos x\big)' = 6x - 5 - \operatorname{sen} x$$
>
> Esta función derivada primera también es derivable en todo el eje real, y de nuevo por reglas obtenemos
>
> $$f''(x) = (6x - 5 - \operatorname{sen} x)' = 6 - \cos x$$

ACTIVIDAD 4.4.2.1. Indiquen dónde existe y cuánto vale la derivada segunda de las siguientes funciones:

- $f(x) = x^3 - 3x$
- $g(x) = 1/x$
- $h(x) = \sqrt{x^3}$

Donde no exista la derivada segunda, investiguen si existe la derivada segunda lateral.

GEOGEBRA 4.4.2.2. GeoGebra permite calcular la función derivada segunda de una función $f(x)$ con misma la notación que usamos en papel. Después de introducir una función $f(x)$ escriban en la línea de comandos:

```
f''(x)
```

Revisen con esta herramienta los resultados de la actividad anterior.

4.4.3 Análisis de la concavidad

Volviendo ahora al análisis de la concavidad de una función $f(x)$, en el caso en que la función admita derivada segunda $f''(x)$, el análisis del crecimiento o decrecimiento de f' en cierto intervalo se realiza a través del signo de f'': si el signo de $f''(x)$ es positivo en un intervalo abierto, entonces $f'(x)$ es creciente en ese intervalo, y f es cóncava hacia arriba. Y si el signo de $f''(x)$ es negativo en un intervalo abierto, entonces $f'(x)$ es decreciente en ese intervalo, y f es cóncava hacia abajo. Lo enunciamos como:

> *Sea f una función que posee derivada segunda $f''(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Se tiene que:*
> - *si $f''(x) > 0$ en (a, b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a, b)*
> - *si $f''(x) < 0$ en (a, b), entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b)*

Para analizar regiones de concavidad necesitamos localizar los intervalos donde $f''(x)$ mantiene un signo definido. El planteo es el mismo que usamos antes para analizar los intervalos donde una función $f(x)$ es positiva o negativa (y saber si su gráfica se dibuja por encima o por debajo del eje x) y también para analizar los intervalos donde una derivada $f'(x)$ es positiva o negativa (y saber si la gráfica de $f(x)$ es creciente o decreciente). Ahora analizaremos el signo de $f''(x)$ para saber si la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

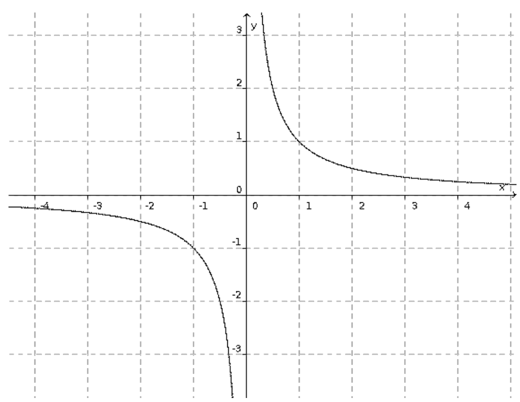
EJEMPLO 4.4.3.1. Analicemos el sentido de concavidad de $f(x) = 1/x$. Recordemos en primer lugar que f está definida para $x \neq 0$. Calculemos allí sus derivadas:

$$f'(x) = -1/x^2$$
$$f''(x) = 2/x^3$$

Para encontrar regiones de concavidad hacia arriba planteamos que $2/x^3 > 0$ y obtenemos como solución $x > 0$; de la misma forma, $2/x^3 < 0$ se resuelve como $x < 0$. Podemos completar una tabla con cada intervalo de concavidad definida, el signo de f'' y la concavidad de f:

intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
signo de f''	$-$	$+$
concavidad de f	$\frown$	$\smile$

Comprueben los resultados obtenidos con la bien conocida gráfica de la función $1/x$:



Actividades

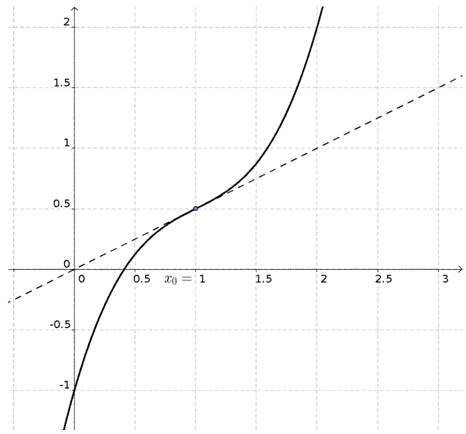
ACTIVIDAD 4.4.3.1. Para fijar conceptos, elaboren la siguiente pregunta:

- ¿Qué signo deben tener la derivada primera y la derivada segunda de una función para que sea creciente y cóncava hacia abajo? Propongan como ejemplo alguna función cuadrática.

ACTIVIDAD 4.4.3.2. Usando la derivada segunda, analicen las regiones en que la función $f(x) = x^4 - 6x^2$ es creciente y cóncava para arriba, creciente y cóncava para abajo, decreciente y cóncava para arriba o decreciente y cóncava para abajo. Grafiquen con GeoGebra para visualizar los resultados

4.4.4 Puntos de inflexión

Si una función $f(x)$ es derivable en un intervalo abierto alrededor de un punto x_0, y f es cóncava hacia abajo a la izquierda de x_0 y cóncava hacia arriba a la derecha de x_0, el punto sobre la gráfica $(x_0, f(x_0))$ tiene características particulares: existe la recta tangente, a la izquierda del mismo la función presenta una concavidad y a la derecha otra. En consecuencia la recta tangente en x_0 no queda encima ni debajo de la gráfica, sino que la "corta" en $(x_0, f(x_0))$. Algo similar ocurre si la gráfica pasa de ser cóncava hacia arriba a ser cóncava hacia abajo. Un punto de estas características se llama **punto de inflexión**.



Respecto de este concepto, distintos libros presentan definiciones ligeramente diferentes de punto de inflexión, con distintos requisitos de comportamiento en el punto x_0. Para nuestro curso, adoptamos la más sencilla[2]:

Un punto $(x_0, f(x_0))$ en la gráfica de una función $y = f(x)$ se llama **punto de inflexión** *si $f(x)$ es derivable en x_0 y el sentido de concavidad de la función cambia al pasar por x_0.*

EJEMPLO 4.4.4.1.
En la gráfica anterior mostramos la función $f(x) = (x-1)^3 + \frac{1}{2}x$. Esta función es continua y admite derivada primera y segunda en todo el eje real, con $f''(x) = 6(x-1)$.

Dado que $f''(x) < 0$ en $(-\infty, 1)$ la función es cóncava hacia abajo a la izquierda de $x_0 = 1$, mientras que $f''(x) > 0$ en $(1, +\infty)$ y la función es cóncava hacia arriba a la derecha de x_0.

Observen que en un punto de inflexión existe la recta tangente y corta a la gráfica: queda por encima de la gráfica del lado en que la función es cóncava hacia abajo y por debajo de la gráfica del lado en que la función es cóncava hacia arriba.

Para localizar posibles puntos de inflexión conviene actuar por descarte: si existe $f''(x_0)$ y es positiva, la función derivada primera es creciente en x_0, y si existe $f''(x_0)$ y es negativa, la función derivada primera es decreciente en x_0; en esos casos no hay cambio del sentido de concavidad al pasar por x_0. Los puntos donde sí es posible que haya puntos de inflexión son aquellos donde $f''(x_0) = 0$ o donde no existe $f''(x_0)$. Se los llama **puntos críticos de concavidad**:

Los **puntos críticos de concavidad** *de una función $f(x)$ derivable son aquellos donde o bien $f''(x) = 0$ o bien no existe $f''(x)$.*

Recuerden que un punto crítico de concavidad no asegura que realmente haya un punto de inflexión. Son sólo puntos críticos de crecimiento de la función derivada primera. Habrán visto ejemplos de funciones con puntos críticos de crecimiento que no resultaron ser extremos; de la misma manera encontrarán puntos críticos de concavidad que resulten no ser puntos de inflexión. Es necesario estudiar la concavidad a izquierda y derecha del punto crítico para ver si efectivamente cambia de sentido.

EJEMPLO 4.4.4.2. Analicemos la función $f(x) = x^4$ para discutir si tiene puntos de inflexión. En este caso existe $f''(x) = 12x^2$ en todo el eje real. Los puntos críticos de concavidad deben cumplir $12x^2 = 0$, que tiene una única solución $x_0 = 0$.

Comprobamos que $f(x)$ es derivable en $x_0 = 0$ y que la derivada segunda es positiva a ambos lados de ese punto. Como no hay cambio de concavidad en $x_0 = 0$, este punto crítico no es punto de inflexión.

[2] El precio de esta sencillez es que dejamos de lado curvas con rectas tangentes verticales, que sí se incluyen en cursos de Geometría. El ejemplo más directo es el punto de inflexión de la gráfica de la ecuación $y = \sqrt[3]{x}$ en el origen de coordenadas.

Veamos ahora con un ejemplo que puede existir un punto de inflexión en puntos donde la derivada segunda no existe:

Ejemplo 4.4.4.3. Analicemos la función $f(x) = x|x|$. De acuerdo a la definición de valor absoluto, tendremos

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{si } x \le 0 \\ x^2, & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Derivando por reglas en los intervalos abiertos y calculando por definición en $x = 0$, comprueben que

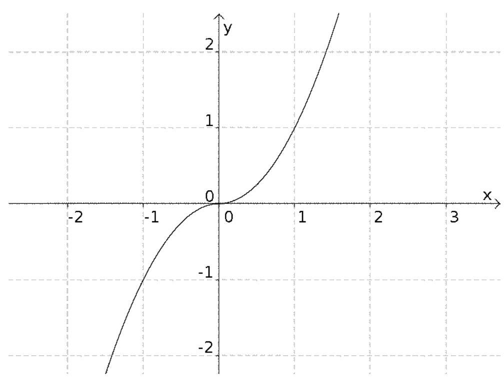
$$f'(x) = \begin{cases} -2x, & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x, & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } x < 0 \\ \nexists, & \text{si } x = 0 \\ 2, & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Separando en los dos intervalos que tienen signo constante de la derivada segunda, vemos que

intervalo	signo de f''	concavidad
$(-\infty, 0)$	-	$\frown$
$(0, +\infty)$	+	$\smile$

Como en $x = 0$ cambia la concavidad y además la función en derivable en ese punto, $(0, 0)$ es un punto de inflexión.

Comprueben en la gráfica lo que hemos encontrado:



Actividades

Actividad 4.4.4.1. Hallen los puntos críticos de concavidad y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^4 - 6x^2$. Grafiquen con GeoGebra para visualizar los resultados.

4.4.5 Criterio de la derivada segunda para extremos locales

Podemos usar el concepto de concavidad y derivada segunda para clasificar puntos críticos de crecimiento, y determinar si son máximos o mínimo locales, utilizando la derivada segunda; por eso se lo conoce como **criterio de la derivada segunda** para la existencia extremos locales.

Este criterio se puede introducir en forma gráfica: si en cierto punto la gráfica de una función tiene recta tangente horizontal y es cóncava hacia arriba, en ese punto hay un mínimo local porque la gráfica queda encima de la recta tangente. En cambio, si en cierto punto la gráfica de una función tiene tangente horizontal y es cóncava hacia abajo, se encuentra un máximo local porque la gráfica queda debajo de la recta tangente.

Enunciamos esta observación como:

Criterio de la derivada segunda para la existencia extremos locales

Dada una función $f(x)$ con derivada segunda continua un punto x_0,

- *si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces $f(x)$ presenta un mínimo local en x_0.*
- *si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces $f(x)$ presenta un máximo local en x_0.*

La justificación formal del criterio de la derivada segunda requiere la continuidad de $f''(x)$ en el punto crítico con $f'(x_0) = 0$ para garantizar el signo de $f'(x)$ a ambos lados de x_0. Pueden consultar más detalle en los libros de la bibliografía.

EJEMPLO 4.4.5.1. En el ejemplo 4.3.1.1 vieron gráficamente que la función $f(x) = \text{sen} x$ tiene máximos locales en $x_k = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$. Podemos aplicar el criterio de la derivada segunda para dar una justificación analítica, ya que la función admite derivada primera en $\mathbb{R}$, dada por $f'(x) = \cos x$, y admite también derivada segunda continua en $\mathbb{R}$, dada por $f''(x) = -\text{sen} x$.

La derivada primera se anula en esos puntos, y la derivada segunda toma el valor -1. El criterio de la derivada segunda asegura que esos puntos son máximos locales.

CAPÍTULO 5
Límites al infinito y comportamientos asintóticos

Contenidos del capítulo: límites para tendiendo a infinito. Comportamientos asintóticos. Crecimiento asintótico y órdenes de magnitud. Integración de contenidos: construcción esquemática de gráficas usando las nociones de continuidad, crecimiento, concavidad y límites.

5.1 Límite de una función $f(x)$ para x tendiendo a infinito

Contenidos de esta sección: límites para $x \to \pm\infty$. Asíntotas horizontales. Álgebra de límites y reglas prácticas.

La continuidad y las derivadas de una función nos permiten conocer aspectos cualitativos de su gráfica: signo, crecimiento, concavidad. Además, las discontinuidades nos advierten que hay puntos que deben ser mirados con mayor cuidado. Para completar la descripción de la gráfica de una función vamos a explorar sus posibles comportamientos cuando la variable toma valores arbitrariamente lejanos al origen, tanto a la derecha como a la izquierda de cero. En esa exploración, conocida como **análisis asintótico**, diremos que la variable tiende a más infinito o a menos infinito, respectivamente. De esta manera podremos interpretar las partes de una gráfica que no caben en el área de un dibujo.

Dedicamos la primera clase del Capítulo al estudio de **límites de funciones cuando la variable tiende a infinito**.

5.1.1 Cuando el límite para x tendiendo a infinito existe: límites finitos

Comencemos investigando un ejemplo:

Ejemplo 5.1.1.1. Nos interesa describir el nivel de oxígeno disuelto en agua en un estanque donde se han vertido desechos orgánicos. Para eso usamos una función $h(t)$ que mide el nivel de oxígeno h en el agua, de modo que $h = 1$ corresponde al nivel normal (sin polución) y el tiempo t se mide en semanas. Un modelo teórico predice que, a causa de la oxidación de los desechos, el nivel de oxígeno disuelto desde que se vierten los mismos ($t = 0$), pasa a ser

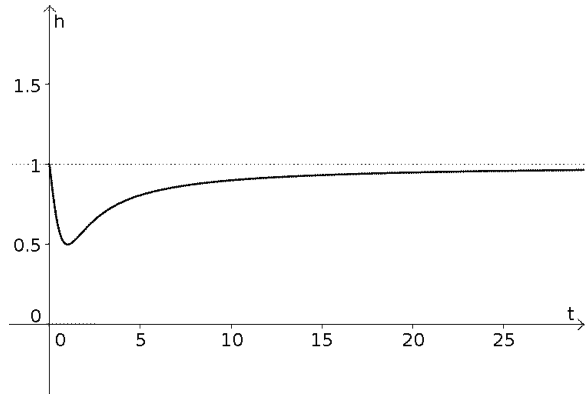
$$h(t) = 1 - \frac{t}{t^2 + 1}$$

Con esta información nos interesa saber si en algún momento se recupera el nivel normal de oxígeno del estanque.

Veamos la evolución de h en una tabla de valores

t (en semanas)	h
1	0.500
10	0.900
100	0.990
1000	0.999

y en una gráfica



Aparentemente, al pasar el tiempo el nivel se acerca a 1, aunque toma muchas semanas hacerlo y no estamos seguros de que en algún momento lo logre. Ni la tabla ni la gráfica permiten expresar valores indefinidamente grandes de t.

Este ejemplo sugiere que es necesario algún mecanismo para explorar valores **arbitrariamente** grandes de la variable de una función.

El ejemplo analiza el comportamiento de cierta función $f(x)$ cuando los valores de x en el dominio **crecen cada vez más**. Esto se conoce como el estudio de la función cuando x **tiende a más infinito**.

El comportamiento de distintas funciones para valores de x cada vez más grandes puede ser muy diverso: al mirar cada vez más a la derecha su gráfica una función puede crecer, decrecer, oscilar, etc. En el caso especial en que dichos valores se **estabilizan** cerca de algún número real L, decimos que la función **tiene límite para** x **tendiendo a más infinito**, y que el límite vale L. La definición de límite adecuada para este caso es:

Dada una función $f(x)$ definida al menos en un intervalo $(a, +\infty)$, decimos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

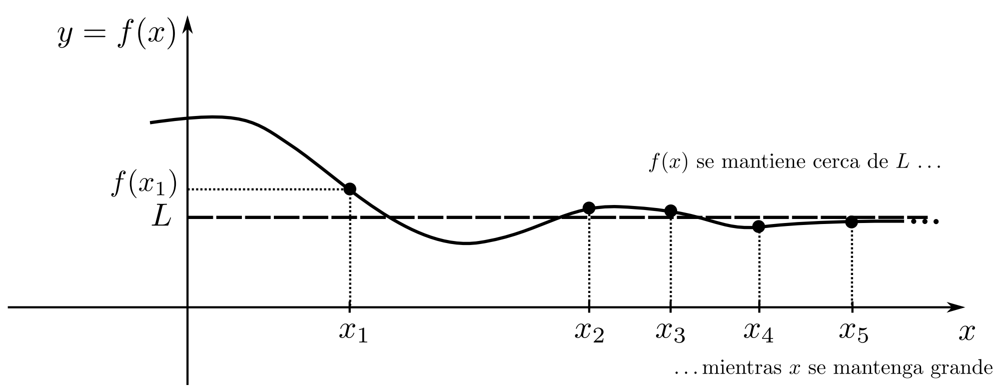
*cuando los valores de $f(x)$ se mantienen tan cercanos como se quiera a un valor fijo L, bajo la condición de tomar valores de x suficientemente grandes. Esta notación se lee "***el límite de $f(x)$, cuando x tiende a más infinito, es igual a L***".*

También podemos escribir

$$f(x) \to L \text{ cuando } x \to +\infty$$

*que se lee "***$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a más infinito***".*

El gráfico siguiente ilustra en general ese comportamiento.



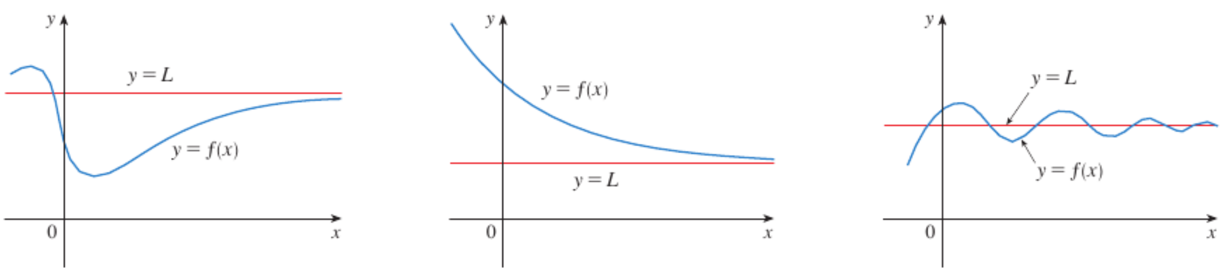
La palabra **tiende** es clave para describir un límite, como vimos en el Capítulo 2: significa que la variable x no está fija sino que se mueve hacia cierto lugar. También significa que x no llega a ese lugar: no hay un último valor de x que podamos considerar: nos interesa x grande, pero cada vez que se tome un valor de x grande, siempre se pueden tomar otros valores de x todavía más grandes.

En el ejemplo del nivel de oxígeno, la exploración numérica y gráfica sugiere que

$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = 1$$

Al igual que en los casos discutidos en el Capítulo 2, al decir $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ estamos dando dos informaciones: por un lado que el límite **existe**, es decir que la función se estabiliza cerca de cierto valor, y por el otro **cuánto vale** dicho límite. También es análogo al Capítulo 2 que cuando el $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe es único. Es decir, una función no puede estabilizarse en dos valores de límite distintos cuando $x \to +\infty$.

Gráficamente vemos que cuando $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ la gráfica de la función se estabiliza cerca de la recta horizontal $y = L$ a medida que x crece más y más (podríamos decir mirando a la derecha de la gráfica). Hay diferentes maneras de estabilizarse, las siguientes gráficas muestran algunas posibilidades:



En los dos primeros gráficos el valor de la función se acerca a L cuando x crece, en un caso por debajo y en el otro por arriba, sin llegar nunca a valer L. En el tercer gráfico vemos que en algunos tramos el valor de la función se acerca a L, alcanza el valor L y luego se aleja pero menos que antes, y vuelve a acercarse repetidamente. Todos estos casos cumplen la definición dada: los valores de la función **se mantienen** tan cercanos a L cuando tomamos x suficientemente grande.

También nos interesa el comportamiento de funciones definidas al menos en un intervalo semi-infinito a la izquierda del eje real, de la forma $(-\infty, a)$, cuando la variable se hace arbitrariamente negativa (es decir, negativa y de valor absoluto arbitrariamente grande). En esta exploración decimos que x tiende a **menos infinito** y anotamos $x \to -\infty$.

Si la gráfica de una función $f(x)$ se estabiliza cerca de un valor L cuando x decrece más y más negativamente (podríamos decir mirando a la izquierda de la gráfica) decimos que **existe el límite de $f(x)$ para x tendiendo a $-\infty$**. La definición adecuada, siguiendo el esquema anterior, es la siguiente:

Dada una función $f(x)$ definida al menos en un intervalo $(-\infty, a)$, decimos que

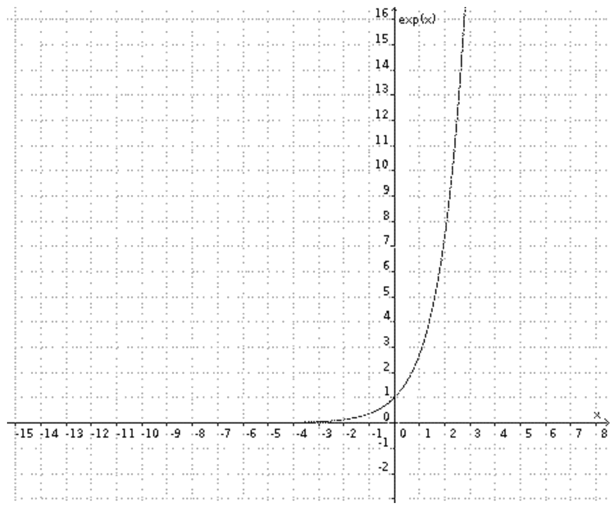
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

cuando los valores de $f(x)$ se mantienen tan cercanos como se quiera a un valor fijo L, bajo la condición de tomar valores de x negativos y de valor absoluto suficientemente grande. Esta notación se lee "**el límite de $f(x)$, cuando x tiende a menos infinito, es igual a L**".
También podemos escribir

$$f(x) \to L \text{ cuando } x \to -\infty$$

que se lee "**$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a menos infinito**".

EJEMPLO 5.1.1.2. Recuerden la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$



Una exploración gráfica sugiere que

$$e^x \to 0 \text{ cuando } x \to -\infty$$

Usaremos la expresión $x \to \pm\infty$ cuando necesitemos referirnos a ambos límites, $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

Interpretación gráfica: asíntotas horizontales

Cuando existe el límite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, la gráfica de la función se mantiene cerca de la recta horizontal $y = L$ cuando x se mueve más y más hacia la derecha. A dicha recta se la llama **asíntota horizontal derecha**.

Análogamente, cuando existe el límite $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = M$, la gráfica de la función se mantiene cerca de la recta horizontal $y = M$ cuando x se mueve más y más hacia la izquierda. A dicha recta se la llama **asíntota horizontal izquierda**.

La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal derecha** *de la gráfica de $y = f(x)$ si*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

Análogamente, la recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal izquierda** *de la gráfica de $y = f(x)$ si*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = M$$

Ejemplo 5.1.1.3. La función analizada en el ejemplo 5.1.1.1 tiene una asíntota horizontal derecha, con ecuación $h = 1$. Está representada con línea punteada en la gráfica de ese ejemplo.

La función $y = e^x$ tiene una asíntota horizontal izquierda, con ecuación $y = 0$.

Noten que la asíntota horizontal es una guía visual para reconocer que el límite correspondiente existe, al mostrar la tendencia de la función a estabilizarse en un cierto valor.

Actividades

Actividad 5.1.1.1. Para fijar conceptos, resuelvan los siguientes límites recordando las gráficas de funciones básicas o transformaciones de ellas:

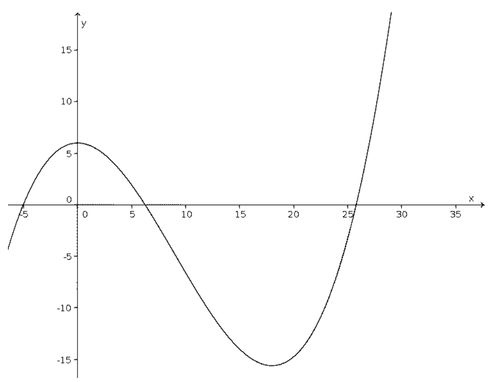
- $\lim_{x\to+\infty} 1/x$
- $\lim_{x\to-\infty} 1/x$
- $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}$

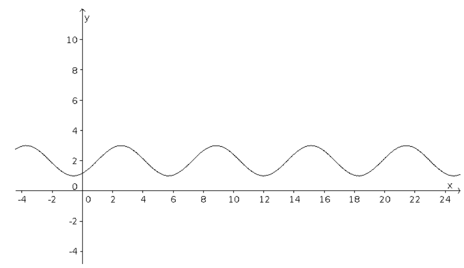
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x-3}$

Si los límites son finitos, identifiquen las correspondientes asíntotas horizontales.

5.1.2 Cuando el límite para x tendiendo a infinito no existe: límites infinitos y comportamiento oscilante

EJEMPLO 5.1.2.1. En muchos casos puede ser que no exista el límite para $x \to +\infty$. Esto significa que los valores de la función no se estabilizan para x grande. Consideren las gráficas siguientes:





¿Podrían decir si existe el límite de estas funciones cuando $x \to +\infty$?

En el segundo caso los valores que toma la función oscilan entre 1 y 3. Intuimos que estas oscilaciones se mantienen cuando tomamos valores de x arbitrariamente grandes.

Podemos ver que el comportamiento de estas funciones cuando x crece más y más es diferente a los anteriores.

En el primer caso vemos que los valores de la función se escapan por encima de la región graficada. Intuimos que crecen por encima de cualquier altura cuando tomamos valores de x suficientemente grandes. Si bien el límite no existe, hay una forma de indicar que la función toma valores arbitrariamente grandes: se dice que el límite **no existe porque la función tiende a más infinito**.

En el segundo caso, se observa del gráfico que la función toma repetidamente un rango de valores sin estabilizarse alrededor de ningún valor definido. En este caso, decimos que el límite **no existe porque la función oscila**.

Límites infinitos

Precisemos la definición del primer caso:

Dada una función $f(x)$, definida al menos en un intervalo $(a, +\infty)$, decimos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

cuando los valores de $f(x)$ se mantienen tan grandes como se quiera, bajo la condición de tomar valores de x positivos y suficientemente grandes. Esta notación se lee "**el límite de $f(x)$, cuando x tiende a más infinito, no existe porque tiende a más infinito**".

También podemos escribir

$$f(x) \to +\infty \text{ cuando } x \to +\infty$$

que se lee "**$f(x)$ tiende a más infinito cuando x tiende a más infinito**".

Hay que destacar que $+\infty$ no es un número, y que la igualdad en esta definición de límite es simbólica. Al anotar

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

decimos que el límite no existe (en el sentido que la función no se estabiliza) y **además informamos cómo se comporta la función cuando x crece arbitrariamente**. Usualmente se lee en forma breve "**el límite de $f(x)$, cuando x tiende a más infinito, es más infinito**"[1].

Análogamente se describen otros comportamientos infinitos:

- *Decimos que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, cuando los valores de $f(x)$ se mantienen negativos y de valor absoluto tan grande como se quiera, bajo la condición de tomar valores de x positivos y suficientemente grandes.*
- *Decimos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, cuando los valores de $f(x)$ se mantienen positivos y tan grandes como se quiera, bajo la condición de tomar valores de x negativos y de valor absoluto suficientemente grande.*
- *Decimos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, cuando los valores de $f(x)$ se mantienen negativos y de valor absoluto tan grande como se quiera, bajo la condición de tomar valores de x negativos y de valor absoluto suficientemente grande.*

EJEMPLO 5.1.2.2. Recuerden la gráfica de $f(x) = x^3$, vista en el Capítulo 1. Resulta evidente que

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \text{ y } \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

Los mismos resultados se encuentran razonando analíticamente: ¿cómo es el valor de x^3 cuando x es positivo y muy grande ? ¿cómo es el valor de x^3 cuando x es negativo y de valor absoluto muy grande?

Observen que el límite para x tendiendo a $-\infty$ explora una región del dominio bien distinta que el límite para x tendiendo a $+\infty$. Sugerimos siempre estudiarlos por separado. Según la función que se analice, podría ocurrir que los resultados sean iguales o que sean distintos.

Límites oscilantes

Por descarte, si el dominio de una función $f(x)$ permite explorar el límite de una función para $x \to +\infty$ o para $x \to -\infty$, y encontramos que el límite no es finito ni infinito, se dice que el límite **no existe porque la función oscila**. Un ejemplo típico de este comportamiento, con una gráfica bien conocida, es la función $f(x) = \text{sen} x$.

Cuando encuentren un límite oscilante, explíquenlo en palabras. No se usa ningún símbolo particular para estos casos.

Actividades

ACTIVIDAD 5.1.2.1. Para fijar conceptos, resuelvan los siguientes límites recordando las gráficas de funciones básicas:

- $\lim_{x\to+\infty} x^2$
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}$
- $\lim_{x\to+\infty} e^x$
- $\lim_{x\to+\infty} \ln x$
- $\lim_{x\to+\infty} \text{sen} x$
- $\lim_{x\to-\infty} x^2$
- $\lim_{x\to-\infty} x^3$

[1]Otros autores dicen que el límite existe y es infinito para expresar la misma idea.

Actividad 5.1.2.2.

- Grafiquen una función $f(x)$ que cumpla $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- Grafiquen una función $g(x)$ que cumpla $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$ y tenga una asíntota horizontal $y = 2$.
- Grafiquen una función $h(x)$ que cumpla $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 2$ y no posea asíntota horizontal derecha.

5.2 Reglas prácticas para calcular límites para la variable tendiendo a infinito

5.2.1 Cuando los límites son evidentes

En lo que va de esta sección hemos hablado de límites para $x \to \pm\infty$ en base a gráficos y tablas de valores. Sin embargo, con una tabla nunca alcanzamos valores **arbitrariamente grandes**, mientras que un gráfico muestra solamente una ventana y nunca la gráfica completa de la función. Desde ya, el límite no se puede calcular evaluando la función, con estas técnicas solo se puede **intuir** la existencia y el valor del límite.

En general, al mirar la fórmula de una función $f(x)$ debemos preguntarnos qué pasará cuando x sea cada vez más grande y descubrir la respuesta. En algunos casos será bastante evidente y en otros casos no. Es importante que reconozcan los límites de las funciones básicas que trabajamos en el Capítulo 1. **Aceptaremos como correctos** los límites evidentes de funciones básicas[2].

EJEMPLO 5.2.1.1. Hemos propuesto la exploración de límites evidentes en las actividades anteriores. Para que no queden dudas, podemos destacar como ejemplos los siguientes:

- $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ para cualquier potencia n natural.
- $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ para cualquier potencia n par y positiva.
- $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ para cualquier potencia n impar y positiva.
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ para cualquier potencia n natural.
- $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Actividades

ACTIVIDAD 5.2.1.1. Para fijar conceptos, justifiquen los límites del ejemplo anterior. Para eso usen las definiciones y las gráficas correspondientes.

5.2.2 Álgebra de límites finitos, cuando $x \to \pm\infty$

Cuando consideren una función más elaborada, expresada con operaciones entre funciones básicas (como suma, producto, cociente, composición), empiecen por explorar cada función sencilla que aparezca en la expresión. En el resto de la clase veremos reglas prácticas que permitan determinar la existencia y valor de algunos límites elaborados, **siempre a partir de los límites que reconozcamos en expresiones más sencillas**.

Si los límites que aparecen son finitos, se pueden aplicar las técnicas ya aprendidas para $x \to x_0$ al cálculo de límites cuando $x \to \pm\infty$. Los enunciados son similares para $x \to +\infty$ y para $x \to -\infty$:

[2]Por supuesto, se pueden demostrar trabajando con la definición de límite, pero no lo haremos en este curso.

Supongamos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ *existen y son finitos, y sea* k *una constante real. Entonces*

1. *existe* $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
2. *existe* $\lim\limits_{x\to+\infty}(kf(x)) = k \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3. *existe* $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x).g(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
4. *si* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \neq 0$, *existe* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim_{x\to+\infty} f(x)}{\lim_{x\to+\infty} g(x)}$

En cada caso, deben calcular primero los límites de $f(x)$ *y* $g(x)$ *por separado. Si existen, y son finitos, la expresión de la derecha les dice cuál es el resultado de los límites planteados.*
Reglas similares valen para $x \to -\infty$.

Ejemplo 5.2.2.1. Calculemos $\lim_{x\to-\infty}(1-e^x)\left(2-\dfrac{1}{x}\right)$

Inspeccionamos cada función que interviene:

- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ (porque conocemos el gráfico de $y = e^x$)
- $\lim_{x\to-\infty} 1 = 1$ (porque conocemos el gráfico de una función constante)
- luego $\lim_{x\to-\infty}(1-e^x) = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ (porque conocemos el gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$)
- $\lim_{x\to-\infty} 2 = 2$ (porque conocemos el gráfico de una función constante)
- luego $\lim_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}\right) = 2$
- luego $\lim_{x\to-\infty}(1-e^x)\left(2-\dfrac{1}{x}\right) = 1\cdot 2 = 2$

Actividades

Actividad 5.2.2.1.

- Escriban la función $f(x) = (2x-1)/(2x+3)$ como suma de dos funciones con límite finito cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$.
- Usen la expresión conseguida para calcular los límites de $f(x)$ cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$.

5.2.3 Álgebra de límites infinitos

Cuando analicemos el límite de una suma, o de un producto, o de un cociente, o de una función compuesta, es posible que alguna de las funciones involucradas tienda a infinito. También puede suceder que el denominador de un cociente tienda a cero. Vale la pena insistir en que no es posible dividir por cero, y que infinito no es un número: no se puede operar con infinitos como si fueran números.

Las reglas que aprendimos para manipular infinitos en el Capítulo 2, en el caso en que x tiende a un número x_0, también son válidas cuando $x\to\pm\infty$. Repasamos a continuación los casos más evidentes, anotando $\lim_{x\to a}$ para referirnos tanto a $x\to\pm\infty$ como a $x\to x_0$ finito:

Sumas

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L$ finito, entonces $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty$
- Si$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, entonces $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty$

Productos

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L$ finito y no nulo, entonces $\lim_{x\to a}(f(x)\,g(x)) = \pm\infty$, dependiendo del signo de L.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces $\lim_{x\to a}(f(x)\,g(x)) = \pm\infty$, dependiendo del signo de cada función.

Cocientes

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ finito y no nulo, y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = \pm\infty$, dependiendo del signo de L y del signo con que $g(x) \to 0$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L$ finito y no nulo, entonces $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = \pm\infty$, dependiendo del signo de L.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = 0$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = \pm\infty$, dependiendo del signo de cada función.

Funciones compuestas

Hemos visto cómo proceder con el límite de funciones compuestas, de la forma $\lim_{x\to a} f(u(x))$, cuando $\lim_{x\to a} u(x) = b$ es finito, y cuando $f(u)$ es continua en $u = b$, en el Capítulo 2. Ese resultado se extiende a casos donde $\lim_{x\to a} u(x) = \pm\infty$. También se puede extender a casos donde $\lim_{u\to b} f(u) = \pm\infty$. Lo podemos enunciar en forma extendida refiriéndonos al $\lim_{x\to a} f(u(x))$ como sigue:

Sean u y g dos funciones que verifican que $\mathbf{Im}\, u \subset \mathbf{Dom}\, g$.
Si

1. $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ *donde a es un símbolo que puede representar $+\infty$ o $-\infty$, y b es un símbolo que puede representar $+\infty$ o $-\infty$,*
2. $\lim_{u\to b} g(u) = c$, *donde c es un símbolo que puede representar un número finito, $+\infty$ o $-\infty$,*

entonces

$$\lim_{x\to a} g(u(x)) = \lim_{u\to b} g(u)$$

donde la igualdad es simbólica, indicando que si el lado derecho es un límite infinito, el lado izquierdo también lo es (o que si el lado derecho es un límite finito, el lado izquierdo también es finito y da el mismo número).

En el caso en que $\lim\limits_{x\to a} u(x)$ sea un número finito u_0, para asegurar la validez de esta regla se debe verificar además que o bien que $g(u)$ sea continua en $u = u_0$, o bien $u(x)$ se mantenga distinto de u_0 cuando x se acerca a a (de forma tal que en el proceso de tomar el límite $x \to +\infty$ nunca será necesario evaluar $g(u_0)$).

EJEMPLO 5.2.3.1. Calculemos el límite

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}$$

Se trata de una función compuesta, donde conviene llamar $u(x) = x^2 + 1$ y $g(u) = \sqrt{u}$, de manera tal que $f(x) = g(u(x)) = \sqrt{x^2+1}$. Se analiza "desde adentro hacia afuera":

Vemos que $u(x) = x^2 + 1 \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$, porque es la suma de un término x^2 que tiende a $+\infty$ y un término 1 constante (con límite finito).

Vemos también que $g(u) = \sqrt{u} \to +\infty$ cuando $u \to +\infty$, porque conocemos la gráfica de esta función.

Podemos afirmar entonces que

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{u(x)}=\lim_{u\to+\infty}\sqrt{u}=+\infty$$

Veamos otro ejemplo donde $u(x)$ tienda a un valor finito u_0 y exista el límite $\lim_{u\to u_0} g(u)$, pero $g(u)$ no sea continua en u_0(es decir, que $g(u)$ tenga una discontinuidad evitable en u_0).

EJEMPLO 5.2.3.2. Analicemos el límite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{sen}(1/x)}{1/x}$$

Se trata de un cociente, por lo que corresponde primero explorar por separado el numerador y el denominador. Para analizar el numerador usamos la regla de la función compuesta con $u(x)=1/x$, de manera tal que $u(x)=1/x\to 0^+$ cuando $x\to+\infty$ y que sen(u) es continua en $u=0$; así vemos que el numerador tiende a cero:

$$\lim_{x\to+\infty}\text{sen}(1/x)=\lim_{u\to 0^+}\text{sen }u=0$$

El denominador también tiende a cero, por lo que se trata de un límite indeterminado, del "tipo 0 sobre 0". Debemos tratar de salvar la indeterminación pero vemos no se puede sacar factor común para simplificar. Trataremos todo el cociente como una sola función compuesta, llamando $u(x)=1/x$ y $g(u)=\dfrac{\text{sen}u}{u}$. Como es bien sabido, existe $\lim_{u\to 0}\dfrac{\text{sen}u}{u}=1$.

Se analiza la composición "desde adentro hacia afuera". Vemos que $u(x)=1/x\to 0^+$ cuando $x\to+\infty$ y que $g(u)$ no es continua (ni siquiera está definida) en $u=0$, pero podemos controlar que $u(x)=1/x$ se mantiene distinto de 0 cuando $x\to+\infty$.

Podemos afirmar entonces que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{sen}(1/x)}{1/x}=\lim_{u\to 0^+}\frac{\text{sen}u}{u}=1$$

Actividades

ACTIVIDAD 5.2.3.1. Determinen los límites de $f(x)$ cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$, e indiquen si hay asíntotas horizontales, en los siguientes casos:

- $f(x)=x^3+x$
- $f(x)=(3-x)(1+x)^2$
- $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$

Recomendamos resolver estos límites por exploración analítica, y luego respaldar sus resultados graficando con GeoGebra.

Casos indeterminados

En las listas anteriores evitamos algunos límites indeterminados: sumas, productos y cocientes en los que el límite no se puede determinar en una primera inspección. Son las mismas situaciones que vimos en el Capítulo 2; las repasamos ahora anotando $\lim_{x\to a}$ para referirnos tanto a los casos nuevos $x\to\pm\infty$ como a $x\to x_0$ finito.

- si $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$, no podemos anticipar el resultado de $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))$.
  Según las funciones en cuestión, podríamos obtener un límite finito y no nulo, o bien cero, o bien $\pm\infty$. Intuitivamente, se trata de ver cuál infinito es más "importante". Se trata de un caso **indeterminado del "tipo ∞ menos ∞"**; se recomienda operar para reescribir la resta, antes de calcular el límite.

EJEMPLO 5.2.3.3. Calculemos el límite de un polinomio para $x \to +\infty$, por ejemplo

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3 - 2x^2 + 1)$$

Analizamos primero cada término y vemos que $x^3 \to +\infty$, $2x^2 \to +\infty$ y $1 \to 1$ (como práctica, justifiquen cada límite), y encontramos una competencia del "tipo $\infty - \infty$". Es necesario reescribir la resta, antes de calcular el límite. Para eso se recomienda sacar de factor común la potencia más alta

$$x^3 - 2x^2 + 1 = x^3\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$$

Ahora exploramos el límite de cada factor en este producto: $x^3 \to +\infty$ y $\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right) \to 1$, porque $2/x \to 0$ y $1/x^3 \to 0$. Usando reglas para el producto podemos afirmar que

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3 - 2x^2 + 1) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$$

(noten que no sería correcto escribir "$+\infty.1 = +\infty$, porque infinito no es un número; al trabajar en papel es recomendable usar flechas para indicar el límite de cada factor, y justificar en palabras el último paso).

- si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, no podemos anticipar el resultado de $\lim_{x\to a}(f(x)\,g(x))$.
  Según las funciones en cuestión, podríamos obtener un límite finito y no nulo, o bien cero, o bien $\pm\infty$. Intuitivamente, se trata de si es más "importante" el infinito o el cero. Se trata de un caso **indeterminado del "tipo 0 por ∞"**, y se recomienda operar para reescribir el producto, antes de calcular el límite.
- $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, no podemos anticipar el resultado de $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))$.
  Según las funciones en cuestión, podríamos obtener un límite finito y no nulo, o bien cero, o bien $\pm\infty$. Intuitivamente, se trata de si es más "importante" el infinito del numerador o el del denominador. Se trata de un caso **indeterminado del "tipo "∞ sobre ∞"**, y se recomienda operar para reescribir el cociente, antes de calcular el límite.

Este último caso indeterminado probablemente es el más frecuente cuando estudiamos límites para $x \to \pm\infty$. Por eso vamos a discutir algunas recomendaciones: la estrategia para resolverlos es reescribir las funciones del numerador y/o del denominador para poder hacer alguna simplificación. Si lo logramos, y las nuevas expresiones ya no son del "tipo ∞ sobre ∞", se dice que salvamos la indeterminación.

EJEMPLO 5.2.3.4. Un caso importante es el de cocientes de polinomios. Vamos a calcular como ejemplo el $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{2x-1}$.

Explorando los límites del numerador y del denominador cuando $x \to +\infty$, vemos que los dos dan $+\infty$. Luego el límite del cociente es indeterminado.

1. En estos casos conviene sacar de factor común la mayor potencia de x, en el numerador y en el denominador:
$$\frac{x^2+1}{2x-1} = \frac{x^2\left(1 + 1/x^2\right)}{x\,(2 - 1/x))}$$
No hay problema en dividir por x porque nos interesa $x \neq 0$ (de hecho, x bien grande).
2. Luego se puede simplificar
$$\frac{x^2+1}{2x-1} = x\left(\frac{1 + 1/x^2}{2 - 1/x}\right)$$
con lo cual reescribimos el cociente original como un producto.

3. Como el primer factor tiende a $+\infty$ y el segundo factor tiende al límite finito $1/2$ (háganlo con cuidado, con las reglas que ya vimos), podemos afirmar que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x-1} = +\infty$$

Grafiquen con computadora $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x-1}$ y verifiquen el resultado.

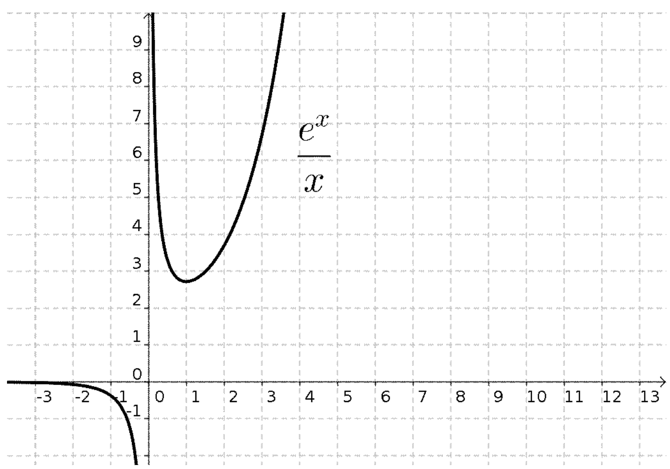
Actividades

Actividad 5.2.3.2. Intenten resolver los siguientes límites:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^4}{x^4+2}$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-2x-1}{3x^2-2x+5}$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-1}}{x-2x^2+2}$

Un límite "tipo ∞ sobre ∞" especial: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}$

La función exponencial aparece con frecuencia en modelos aplicados, donde podría ser de interés calcular el límite $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}$. Una inspección basta para ver que tanto el numerador como el denominador tienden a $+\infty$: el límite es indeterminado del "tipo ∞ sobre ∞", pero no podemos simplificar (¡las propiedades de e^x no permiten extraer un x de factor común!). Veamos el comportamiento en una gráfica:



La gráfica sugiere que la función $\dfrac{e^x}{x}$ toma valores arbitrariamente grandes cuando $x \to +\infty$. Este resultado es correcto, y lo **aceptaremos** sin pedirles más justificación.

> Recuerden a partir de este ejercicio que
>
> $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Varios límites interesantes, en particular algunos que incluyen logaritmos y veremos a continuación, se relacionan con este resultado.

Ejemplo 5.2.3.5. Con este resultado podemos justificar un procedimiento para calcular

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x$$

Dado que se propone el límite de un producto, inspeccionamos primero cada factor. Vemos que, cuando $x \to -\infty$, $e^x \to 0$. Se trata de un límite indeterminado, del "tipo 0 por ∞".

Proponemos un cambio de variables $u = -x$, de manera tal que cuando $x \to -\infty$ la nueva variable $u \to +\infty$ (lo hacemos con el objetivo de llevar la exploración a $+\infty$). Reemplazando $x = -u^3$ podemos usar la regla de la función compuesta y decir que

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{u \to +\infty} \left(-ue^{-u}\right) = -\lim_{u \to +\infty} \frac{u}{e^u} = -\lim_{u \to +\infty} \frac{1}{e^u/u}$$

El signo igual en estas manipulaciones es tentativo: si al final el límite existe, se trata de igualdades entre números. Pero si al final el límite es infinito, el signo igual es simbólico: significa que todas las expresiones involucradas tienen límite infinito (y no es una igualdad entre números). En este caso, **sabiendo** que

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$$

y usando reglas de cocientes concluimos que

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = -\lim_{u \to +\infty} \frac{1}{e^u/u} = 0$$

Con una técnica similar podemos resolver otro límite indeterminado importante:

Ejemplo 5.2.3.6. Demostraremos que el límite de $\dfrac{\ln x}{x}$ cuando $x \to +\infty$ vale 0.

Inspeccionando el numerador y el denominador vemos que efectivamente se trata de un límite indeterminado, del "tipo ∞ sobre ∞". Proponemos un cambio de variables $u = \ln x$, de manera tal que cuando $x \to +\infty$ la nueva variable $u \to +\infty$. Además, podemos escribir $x = e^u$. Encontramos que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{u \to +\infty} \frac{u}{e^u} = \lim_{u \to +\infty} \frac{1}{e^u/u} = 0$$

Recuerden a partir de este ejemplo que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Actividades

GeoGebra 5.2.3.3. Grafiquen con GeoGebra las funciones x, e^x y $\ln x$ para valores grandes de x. Observen el crecimiento de cada una y establezcan una relación con los resultados

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

5.3 Crecimiento al infinito

Contenidos de esta sección: crecimiento al infinito y órdenes de magnitud. Asíntotas oblicuas.

El límite de una función $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ nos da una idea de su gráfica en la región de valores de x grandes, más **a la derecha de cualquier ventana** que elijamos graficar. Como vimos en la sección 5.1.1, cuando $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe y es finito, la gráfica se estabiliza cerca de una asíntota horizontal. En cambio, vimos en la sección 5.1.2 que cuando $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ la gráfica crece por encima de cualquier altura que podamos imaginar, y cuando $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ la gráfica decrece por debajo cualquier altura negativa. Una descripción análoga se puede hacer cuando $x \to -\infty$; en ese caso estaremos describiendo la gráfica **a la izquierda de cualquier ventana** que podamos graficar.

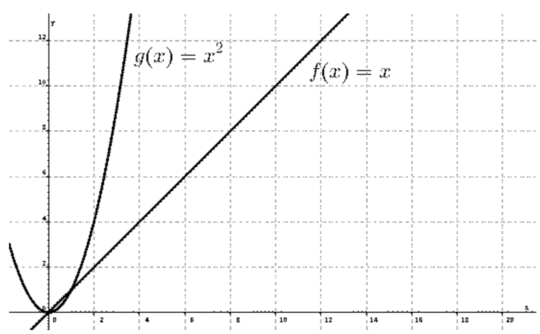
En esta sección vamos a caracterizar con más detalle cómo crecen las funciones que tienden a infinito.

5.3.1 Crecimiento de funciones que tienden a infinito cuando $x \to \pm\infty$

Cuando distintas funciones tienden a infinito, podemos compararlas para distinguir cuál de ellas **"crece más rápido"**.

EJEMPLO 5.3.1.1. Para ilustrar esta comparación, tomemos dos funciones distintas $f(x)$ y $g(x)$ tales que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. En principio, de ambas funciones sabemos lo mismo: sus valores son tan grandes como uno quiera si tomamos x suficientemente grande.

Observemos en más detalle dos funciones particulares: $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Aunque ambas tienden a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$, sus gráficas muestran que crecen de manera diferente:



Para valores grandes de la variable se observa que $g(x)$ resulta mucho mayor que $f(x)$ (tanto que la gráfica de $g(x)$ no cabe en el gráfico cuando la de $f(x)$ todavía cabe; intenten con GeoGebra cambiar la escala del eje y para observar mejor la diferencia entre las gráficas). Dicho de otra manera, si queremos ambas funciones tomen valores comparables, necesitamos evaluar f **mucho más a la derecha** que donde evaluemos g (en la escala de la gráfica apreciamos que $g(x)$ ya es mayor que 12 a partir de $x \approx 3.5$, en tanto que $f(x)$ llega a ser mayor que 12 recién a partir de $x = 12$).

El análisis gráfico indica que, cuando $x \to +\infty$, la parábola $g(x) = x^2$ **crece más rápido** que la recta $f(x) = x$.

La manera técnicamente adecuada de comparar la rapidez de crecimiento de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ que tienden a infinito cuando $x \to +\infty$ es analizar su cociente,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Claro que es un límite indeterminado, del "tipo ∞ sobre ∞"; si podemos resolverlo, sabremos cuál función crece más rápido:

- cuando $f(x)$ y $g(x)$ crecen de manera similar, el cociente se mantiene estable;
- cuando $f(x)$ crece más rápido que $g(x)$, el cociente se hace arbitrariamente grande;
- y cuando $f(x)$ crece más lento que $g(x)$, el cociente se hace arbitrariamente pequeño.

El orden relativo de crecimiento se conoce como **orden de magnitud**. Veamos las definiciones precisas para funciones que tienden a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- *Si $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ (es decir, un valor finito no nulo) se dice que $f(x)$ y $g(x)$ crecen con el* **mismo orden de magnitud**. *Se suele escribir que*
$$\text{cuando } x \to +\infty, \qquad f(x) \sim g(x)$$
para indicar que $f(x)$ y $g(x)$ se mantienen en el mismo orden.
- *Si $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ se dice que $f(x)$ crece con* **mayor orden de magnitud** *que $g(x)$. Se suele escribir que*
$$\text{cuando } x \to +\infty, \qquad f(x) \gg g(x)$$
para indicar que $f(x)$ es mucho mayor que $g(x)$.
- *Si $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ se dice que $f(x)$ crece con* **menor orden de magnitud** *que $g(x)$. Se suele escribir que*
$$\text{cuando } x \to +\infty, \qquad f(x) \ll g(x)$$
para indicar que $f(x)$ es mucho menor que $g(x)$.

El mismo análisis se hace con funciones que tienden a $-\infty$ cuando $x \to +\infty$. Análogamente se describe el comportamiento asintótico cuando $x \to -\infty$.

Los casos más importantes de comparación de órdenes de magnitud se dan entre polinomios de distinto grado, y también entre funciones exponenciales, polinomios y logaritmos. Los discutimos en los siguientes ejemplos, resolviendo los límites necesarios y enunciando las correspondientes reglas prácticas:

EJEMPLO 5.3.1.2. Dados los polinomios $p(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 1$ y $q(x) = x^2 - 2x + 3$, ¿cuál tiene mayor orden de magnitud cuando $x \to +\infty$?

Vamos a analizar el cociente
$$\frac{3x^3 + 4x^2 - 5x + 1}{x^2 - 2x + 3} = \frac{x^3\left(3 + 4/x - 5/x^2 + 1/x^3\right)}{x^2\left(1 - 2/x + 3/x^2\right)} = x\frac{\left(3 + 4/x - 5/x^2 + 1/x^3\right)}{\left(1 - 2/x + 3/x^2\right)}$$
Vemos que, cuando $x \to +\infty$, el paréntesis en el numerador tiende a 3 y el paréntesis en el denominador tiende a 1, mientras que x tiende a $+\infty$. Luego
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3 + 4x^2 - 5x + 1}{x^2 - 2x + 3} = +\infty$$
Encontramos que el polinomio $p(x)$ tiene mayor orden de magnitud que el polinomio $q(x)$.

Regla práctica: en general, dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, con coeficientes principales positivos, el polinomio de mayor grado tiene mayor orden de magnitud cuando $x \to +\infty$.

EJEMPLO 5.3.1.3. Otro ejemplo importante es la comparación del crecimiento del logaritmo natural con el crecimiento de potencias. Calculemos
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r}$$

donde $r > 0$ es cualquier número positivo. Podemos escribir

$$\frac{\ln x}{x^r} = \frac{\ln x}{e^{r \ln x}}$$

y llamar $u = r \ln x$. Como r es positivo, $x \to +\infty$ implica $u \to +\infty$. Usando la regla de la función compuesta

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = \lim_{u \to +\infty} \frac{1}{r} \frac{u}{e^u} = 0$$

(donde usamos el límite especial $e^u \gg u$).

Regla práctica: para cualquier r real y positivo,

$$\text{cuando } x \to +\infty, \qquad \ln x \ll x^r$$

(recuerden que, además de exponentes irracionales, esta regla incluye potencias naturales y potencias racionales o raíces de x).

EJEMPLO 5.3.1.4. Dado el polinomio $p(x) = 3x^2 + 2x - 1$ y la función exponencial $g(x) = e^x$, ¿cuál tiene mayor orden de magnitud cuando $x \to +\infty$?

Sabemos que $\lim_{x \to +\infty} p(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, y corresponde analizar el cociente

$$\frac{e^x}{3x^2 + 2x - 1} = \frac{e^x}{x^2} \frac{1}{(3 + 2/x - 1/x^2)}$$

Como el paréntesis en el denominador tiende al valor finito 3, el trabajo importante es calcular el límite indeterminado $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

Es un caso indeterminado interesante, que requiere un poco de ayuda: conviene estudiar primero

$$\ln\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = x - 2\ln x = x\left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right)$$

Ahora usamos que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (que probamos recién, si tomamos $r = 1$) para saber que la expresión entre paréntesis tiende a 1, luego

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = +\infty$$

Finalmente, podemos llamar $u = \ln\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$ y calcular

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} e^{\ln\left(\frac{e^x}{x^2}\right)} = \lim_{u \to +\infty} e^u = +\infty$$

La conclusión es que e^x crece con mayor orden de magnitud que x^2. En consecuencia, e^x crece con mayor orden de magnitud que el polinomio $3x^2 + 2x - 1$ (en palabras, **la exponencial natural crece más rápido que las parábolas**).

Trabajando de la misma manera, pueden mostrar que para cualquier $r > 0$ **la exponencial natural crece más rápido que** x^r.

Regla práctica: para cualquier $r > 0$

$$\text{cuando } x \to +\infty, \qquad e^x \gg x^r$$

(esto incluye potencias y raíces de x, cuando $r = 1/2$, $1/3$, etcétera).

Podemos reunir los resultados previos y recordar: para cualquier $r > 0$,

$$\textit{cuando } x \to +\infty, \qquad \ln x \ll x^r \ll e^x$$

Actividades

ACTIVIDAD 5.3.1.1. Para fijar conceptos, repasen las siguientes preguntas:

- ¿Qué significa que una función $f(x)$ crece con mayor orden de magnitud que otra función $g(x)$, cuando $x \to +\infty$?
- Usando algunos límites calculados en la sección anterior, ¿cuál es el orden de magnitud relativo de x, e^x y $\ln x$ cuando $x \to +\infty$?

ACTIVIDAD 5.3.1.2. Determinen cuál de las funciones de cada ítem crece con mayor orden de magnitud en la región indicada, o si tienen el mismo orden de magnitud:

- $y = 2^x$ o $y = 5^x$, cuando $x \to +\infty$
- $y = \ln\left(x^2\right)$ o $y = 2x$, cuando $x \to +\infty$
- $y = x^2 + 2x - 1$ o $y = e^{-2x}$, cuando $x \to -\infty$
- $y = \cosh x$ o $y = x^4$, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$

5.3.2 Asíntotas oblicuas

Cuando una función $f(x)$ tiende a infinito con el mismo orden de magnitud que una función lineal, podemos sospechar que su gráfica es similar a una recta. Veamos con cuidado qué significa que una gráfica sea similar a una recta, y si esta sospecha es cierta.

Si la gráfica de una función $f(x)$, cuando x tiende a $+\infty$, se acerca más y más a una recta que no es horizontal, se dice que la función tiene una **asíntota oblicua hacia la derecha**, y se llama asíntota oblicua a dicha recta. Gráficamente esto significa que la diferencia de alturas entre las gráficas es cada vez menor, es decir, que la distancia entre $y = f(x)$ y la recta tiende a cero. Formalmente, tenemos la siguiente definición:

L*a recta $y = mx + b$, con $m \neq 0$ se llama* **asíntota oblicua hacia la derecha** *de la funcióny $= f(x)$ si*

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

Análogamente se define una **asíntota oblicua hacia la izquierda**, considerando el límite cuando $x \to -\infty$.

Para verificar que una función tiene una asíntota oblicua necesitamos encontrar los valores de la pendiente m y de la ordenada al origen b de esa asíntota. Si la condición de asíntota es cierta, encontraremos en primer lugar que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - (mx + b)}{x} = \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}\right) - m = 0$$

que equivale a decir que el $\lim_{x \to +\infty} f(x)/x$ debe ser finito y nos da el valor de la pendiente m.

En segundo lugar, si ya sabemos que $\lim_{x \to +\infty} f(x)/x = m$ y la condición de asíntota es cierta, podremos encontrar que

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - b) = \left[\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)\right] - b = 0$$

que equivale a decir que $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$ debe ser finito y nos da el valor de la ordenada al origen b.

En conclusión, para que una función $y = f(x)$ tenga una asíntota oblicua hacia la derecha se deben cumplir dos condiciones:

- que $y = f(x)$ crezca con el mismo orden de magnitud que $y = x$. En ese caso, llamamos $m = \lim_{x \to +\infty} f(x)/x$.
- que $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$ exista y sea finito. En ese caso, llamamos $b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$.

Si las dos condiciones se cumplen, entonces la recta de ecuación $y = mx + b$ es asíntota oblicua de la gráfica de $f(x)$.

EJEMPLO 5.3.2.1. Veamos si la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x+5}$ tiene asíntotas oblicuas.

Observemos que el dominio de $f(x)$ es $(-\infty, -5/2) \cup (-5/2, +\infty)$. Por eso tiene sentido explorar los límites para $x \to +\infty$ y para $x \to -\infty$.

Para analizar el lado derecho calculamos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x(2x+5)} = \frac{1}{2}$$

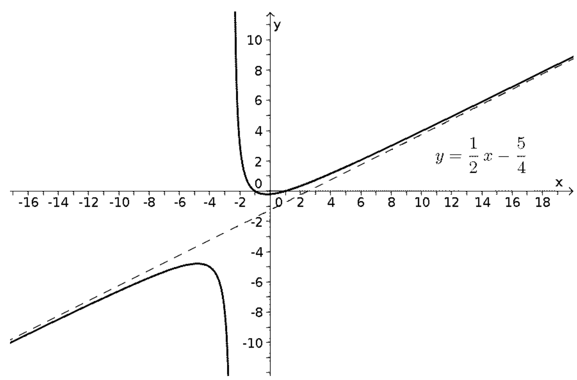
comprobando que $f(x)$ crece con el mismo orden de magnitud que $y = x$. El valor $m = 1/2$ es el candidato a servir como pendiente de la asíntota oblicua. Pero además calculamos

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-1}{2x+5} - \frac{1}{2}x \right) = -\frac{5}{4}$$

confirmando que existe la asíntota oblicua por derecha, con ecuación $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$.

Analizando las mismas expresiones en el límite para $x \to -\infty$ encontramos que la gráfica también tiene asíntota oblicua hacia la izquierda, y que es la misma recta $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$.

Un gráfico hecho con GeoGebra, donde la asíntota oblicua se muestra con línea punteada, nos permite visualizar el comportamiento que hemos calculado:



Actividades

ACTIVIDAD 5.3.2.1. Analicen si las siguientes funciones presentan asíntotas oblicuas u horizontales, hacia la izquierda o hacia la derecha:

- $f(x) = e^x + x$
- $g(x) = \ln x$
- $h(x) = \sqrt{x^2-1}$ (noten que se trata de partes de una hipérbola, seguramente la trabajaron en Álgebra)

5.4 Integración de conceptos: análisis esquemático de gráficas

Contenidos de esta sección: aplicación de las herramientas adquiridas en el curso al análisis esquemático de gráficas.

Todo lo que hemos aprendido hasta ahora nos sirve para reconocer las principales características una función, a partir del análisis de su expresión matemática. Esas características se pueden volcar en una gráfica esquemática, construida a partir de pocos puntos. Nos gustaría afirmar que "entendemos" una función cuando somos capaces de visualizar esquemáticamente su gráfica.

En esta sección les ofrecemos consejos prácticos para organizar la información que se obtiene de la fórmula de una función y para construir una gráfica aproximada y cualitativamente correcta de la misma. Verán que esta actividad representa un repaso integrador del uso de desigualdades, límites, continuidad, derivadas, crecimiento, concavidad y comportamientos asintóticos.

5.4.1 Análisis esquemático de gráficas

Las distintas herramientas que hemos desarrollado hasta ahora dan información cuantitativa y cualitativa acerca de la gráfica de una función $y = f(x)$ a partir de su fórmula. Tomando los aspectos cualitativos en conjunto y unos pocos puntos representativos podemos esbozar esquemáticamente la gráfica de la función.

Para trazar la gráfica esquemática de una función $y = f(x)$ les sugerimos la siguiente organización:

- Determinen su dominio. Comiencen la gráfica representando el dominio en el eje de abscisas.
- Si el dominio lo permite, analicen si hay simetrías de reflexión respecto de los ejes (paridad). Para eso construyan la expresión de $f(-x)$ y compárenla con la expresión de $f(x)$ (si $f(-x)$ coincide con $f(x)$ la función es par; si $f(-x)$ coincide con $-f(x)$ la función es impar). Si encuentran estas simetrías, bastará construir la gráfica para los valores positivos del dominio y luego copiar adecuadamente la parte simétrica.
- Determinen si hay discontinuidades. Si las hay, exploren el comportamiento de la función a cada lado de las discontinuidades tomando límites laterales. Grafiquen los puntos de discontinuidad y, provisoriamente, los límites hallados.
- Si es posible, determinen la ordenada al origen (intersección con el eje y) y los ceros (intersecciones con el eje x) de la función. Grafiquen las intersecciones de la gráfica con los ejes.
- En cada intervalo delimitado por discontinuidades o por ceros de la función determinen si la función es positiva o negativa. El Teorema de Bolzano permite determinar el signo en esos intervalos calculando el valor de la función en un solo punto de prueba. Marquen esta información con signos $+$ y $-$, o bien sobre el gráfico o bien en una tabla de intervalos de positividad.
- Determinen dónde existe la derivada de $f(x)$ y obtengan su expresión de $f'(x)$.
- Analicen el signo de $f'(x)$ para determinar las regiones en que $f(x)$ es creciente o es decreciente. Para eso, separen cada intervalo de continuidad de f en los puntos donde no exista $f'(x)$ o donde $f'(x) = 0$. Si además $f'(x)$ es continua en esos intervalos, el Teorema de Bolzano permite determinar su signo calculando su valor en un solo punto de prueba en cada intervalo. Indiquen en cada intervalo si la función es creciente o decreciente, con flechas $\nearrow$ y $\searrow$, sobre el gráfico o en una tabla de intervalos de crecimiento.
- Revisen los puntos de discontinuidad y los puntos donde cambia el régimen de crecimiento para identificar máximos o mínimos locales. Grafiquen cada extremo local que hayan encontrado.
- Si el dominio contiene intervalos con bordes cerrados, analicen la continuidad y derivabilidad en esos puntos. Revisen si encuentran máximos o mínimos locales.
- Determinen dónde existe la derivada segunda de $f(x)$ y obtengan su expresión de $f''(x)$.
- Analicen el signo de $f''(x)$ para determinar las regiones en que $f(x)$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo. Para eso, separen cada intervalo de continuidad de f en los puntos donde no exista $f''(x)$ o donde $f''(x) = 0$. Si además $f''(x)$ es continua en esos intervalos, el Teorema de Bolzano permite

determinar su signo calculando su valor en un solo punto de prueba en cada intervalo. Indiquen en cada intervalo hallado si la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo, con símbolos $\smile$ y $\frown$, sobre el gráfico o en una tabla de intervalos de concavidad.

- Revisen los puntos de cambio de concavidad para identificar puntos de inflexión. Grafiquen cada punto de inflexión que hayan encontrado.
- Si el dominio lo permite, analicen el comportamiento asintótico de la función calculando los límites de $f(x)$ para $x \to \pm\infty$. En el caso en que alguno de estos límites sea infinito, pueden controlar si hay asíntotas oblicuas. Grafiquen provisoriamente el comportamiento hallado.
- Comparando los extremos locales y los comportamientos asintóticos, determinen si existen máximos o mínimos absolutos.
- Finalmente, respetando los puntos destacados que ya graficaron más la información de positividad, crecimiento, concavidad y comportamiento asintótico, tracen una curva aproximada en cada intervalo en que hayan separado el dominio.

Si bien aconsejamos recordar estas indicaciones, el análisis no debe ser mecánico. Al volcar ordenadamente la información en un gráfico, esperamos que realicen un **análisis crítico de consistencia** de las características calculadas. Esta consistencia les dará confianza en los resultados de los cálculos, o les permitirá descubrir y corregir algún error cometido a lo largo de los mismos.

5.4.2 Ejemplos

Para adquirir práctica en el análisis esquemático de funciones, les proponemos algunos ejemplos desarrollados en detalle. Para aprovecharlos, es conveniente que intenten resolverlos por su cuenta, antes de mirar la resolución. Además, para repasar todo lo estudiado, fundamenten cada uno de los pasos con los conceptos teóricos correspondientes.

EJEMPLO 5.4.2.1. Analicen la función $f(x) = \dfrac{x}{1+x^3}$ y tracen su gráfica en forma esquemática.

Dominio: $\mathbf{Dom}\, f : \mathbb{R} - \{-1\}$

Paridad: $f(-x) = \dfrac{-x}{1-x^3}$. Vemos que ni $f(-x) = f(x)$ ni $f(-x) = -f(x)$; es decir que f no es par ni impar.

Intersecciones con los ejes: $f(x) = 0$ permite despejar $x = 0$, que es el único punto de intersección con el eje x y a la vez resulta intersección con el eje y.

Comportamiento asintótico:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1+x^3} = 0$$

por lo que la recta de ecuación $y = 0$ es asíntota horizontal hacia la izquierda y hacia la derecha.

Discontinuidades: como $x = -1$ no está en el dominio, es un punto de discontinuidad. Veamos de qué tipo es, analizando los límites laterales:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{1+x^3} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{1+x^3} = -\infty$$

Se trata de una discontinuidad infinita. La recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

Función derivada: Luego de utilizar las reglas de derivación y operar algebraicamente, obtenemos

$$f'(x) = \frac{1-2x^3}{(1+x^3)^2}$$

que es válida si $x \neq -1$.

Regiones de crecimiento: el único punto en que se anula la derivada es $x = 1/\sqrt[3]{2} \approx 0.79$, pero además la derivada no existe en la discontinuidad $x = -1$. Resultan tres intervalos para analizar el crecimiento/decrecimiento. Una tabla de regiones de crecimiento se puede organizar como sigue:

intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1/\sqrt[3]{2})$	$(1/\sqrt[3]{2}, +\infty)$
signo f'	+	+	-
crecimiento	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Luego, siendo $f(x)$ es continua en $x = 1/\sqrt[3]{2}$, presenta allí un máximo local. El punto en la gráfica es $(1/\sqrt[3]{2}, 2/3\sqrt[3]{2})$. Como ya sabemos que $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to -1^-$, el máximo no puede ser absoluto.

Función derivada segunda: Su expresión, una vez factorizada, es

$$f''(x) = \frac{-6x^2\left(1+x^3\right)\left(2-x^3\right)}{\left(1+x^3\right)^4}.$$

válida si $x \neq -1$.

Regiones de concavidad: Como el denominador de la derivada segunda es positivo y nunca se anula, buscamos los ceros del numerador. Estos son $x = 0$, $x = -1$ y $x = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$. Además, $x = -1$ no pertenece al dominio. Separando en intervalos, analizamos el signo de $f''(x)$ y obtenemos la siguiente información

intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \sqrt[3]{2})$	$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$
signo f''	+	-	-	+
concavidad	$\smile$	$\frown$	$\frown$	$\smile$

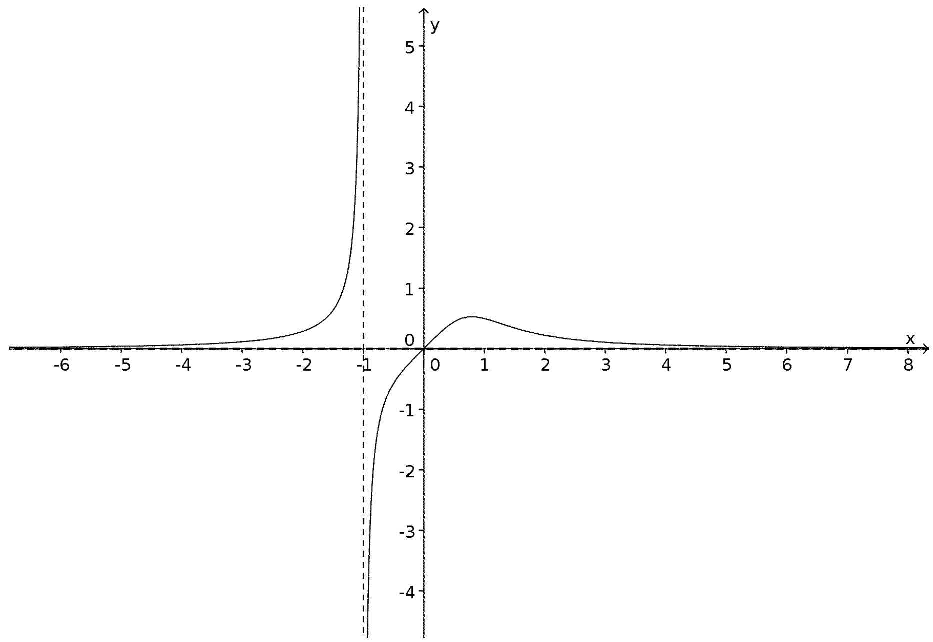
Ya tenemos toda la información necesaria para hacer la gráfica. Es útil confeccionar una tabla con toda la información, les mostramos un formato posible:

intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1/\sqrt[3]{2})$	$(1/\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$	$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$
crecimiento	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
concavidad	$\smile$	$\frown$	$\frown$	$\frown$	$\smile$

Los puntos más representativos son

x	$f(x)$	característica
-1	$\nexists$	asíntota vertical
0	0	intersección con los ejes
$1/\sqrt[3]{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$	máximo local
$\sqrt[3]{2}$	$\frac{1}{3}\sqrt[3]{2}$	punto de inflexión

Dibujen la gráfica esquemáticamente y luego comprueben con GeoGebra el resultado:



EJEMPLO 5.4.2.2. Analicen esquemáticamente la gráfica de $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Dominio: para poder evaluar esta expresión es necesario que $|x| \leq 1$,con $x \neq 0$. Es decir, $\mathbf{Dom} = [-1,0) \cup (0,1]$.

Paridad: el dominio es simétrico y vemos que $f(-x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = -f(x)$, es decir que f es impar. Proseguimos el análisis en el intervalo $(0,1]$, luego copiaremos la gráfica rotada en el intervalo $[-1,0)$.

Intersecciones con los ejes: $f(0)$ no está definida; es decir que la gráfica no corta al eje x. Por otro lado $f(x) = 0$ permite despejar $x = \pm 1$.

Comportamiento asintótico: No tiene sentido buscar asíntotas horizontales porque el dominio de la función no permite que x se acerque a $\pm\infty$.

Continuidad: La función es continua en $(0,1)$. En el borde del dominio $x = 1$ es continua por izquierda. Sin embargo, es discontinua en $x = 0$. Veamos su comportamiento cuando $x \to 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = -\infty$$

es decir que la recta $x = 0$ es asíntota vertical.

Derivada: Calculemos $f'(x)$. La derivada existe en $[-1,0) \cup (0,1]$. Allí se llega a la expresión

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

Observen que esta expresión es negativa en el intervalo $(0,1)$:

intervalo	$(0,1)$
signo de $f'(x)$	-
crecimiento	$\searrow$

Dado que $f(x)$ es continua en el intervalo semi-cerrado $(0,1]$ y tiene derivada negativa en el intervalo abierto $(0,1)$, el Teorema del Valor Medio asegura que f es decreciente en $(0,1]$:

Extremos: Dado que f es continua y decreciente en $(0,1]$, podemos afirmar que $x = 1$ es un mínimo local.

Analicemos además la existencia o no de la derivada lateral en $x = 1$. Dado que no se pueden aplicar reglas de derivación, intentamos el cálculo de la derivada por definición

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - 0}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} -\frac{\sqrt{(1+x)(1-x)}}{x(1-x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1+x}}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x}} = -\infty$$

La derivada lateral por izquierda no existe en $x = 1$ porque el cociente incremental tiende a infinito. Esto indica que la recta tangente deviene vertical en ese punto.

Derivada segunda: Calculemos ahora f''. Su expresión ya trabajada algebraicamente es

$$f''(x) = \frac{x(2 - 3x^2)}{\left(x^2\sqrt{4 + x^2}\right)^2}$$

válida en $[-1, 0) \cup (0, 1]$. El numerador se anula en $x = 0$ (donde no está definida la función) y en $x = \pm\sqrt{2/3} \approx \pm 0.87$. Mirando $x > 0$ y separando en los intervalos correspondientes, se verifica que

intervalo	$(0, \sqrt{2/3})$	$(\sqrt{2/3}, 1)$
signo de $f''(x)$	$+$	-
concavidad	$\smile$	$\frown$

Vemos que en $\sqrt{2/3}$ la función es derivable y cambia su concavidad, por lo que encontramos un punto de inflexión.

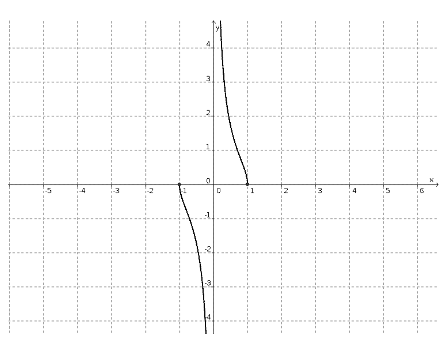
Reunamos la información de crecimiento y concavidad en una misma tabla

intervalo	$(0, \sqrt{2/3})$	$(\sqrt{2/3}, 1)$
crecimiento	$\searrow$	$\smile$
concavidad	$\searrow$	$\frown$

y destaquemos los puntos importantes

x	$f(x)$	característica
0	$\nexists$	asíntota vertical
$\sqrt{2/3}$	$\sqrt{5/2}$	punto de inflexión
1	0	mínimo local

En el intervalo $(0, 1]$ tracen la gráfica esquemática con la información disponible. Luego copien la gráfica reflejada al intervalo $[-1, 0)$ usando que la función es impar. Finalmente, comparen con la gráfica que produce GeoGebra:



Actividades

ACTIVIDAD 5.4.2.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes preguntas:

- ¿Qué información gráfica proporciona el estudio de la continuidad? ¿Cómo se estudia el comportamiento cerca de una discontinuidad?
- ¿Qué información gráfica proporciona el estudio de la derivada primera?
- ¿Qué información gráfica proporciona el estudio de la derivada segunda?
- ¿Qué información gráfica proporciona el estudio de los límites para $x \to +\infty$ y para $x \to -\infty$?

ACTIVIDAD 5.4.2.2. Analicen y grafiquen esquemáticamente algunas de las siguientes funciones:

- $f(x) = x^5 - 5x + 2$
- $f(x) = \begin{cases} -x^2+1, & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$
- $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$
- $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$
- $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$
- $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{x}$. ¿Existe la derivada lateral de f en 1? ¿Cómo se traslada esa información a la gráfica?
- $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
- $f(x) = x\mathrm{e}^x$
- $f(x) = x - e^x$
- $f(x) = x^x$
- $f(x) = \ln(1-x^2)$
- $f(x) = 5x^2 - 2x^2 \ln x$
- $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x}$

GEOGEBRA 5.4.2.3. Grafiquen las funciones que hayan analizado y visualicen en detalle cada resultado destacado (intersecciones con los ejes, discontinuidades, asíntotas, crecimiento, extremos, concavidad, puntos de inflexión, etc.).

CAPÍTULO 6
Funciones inversas

Contenidos del capítulo: repaso de funciones inyectivas, suryectivas y biyectivas. Funciones inversas. Inversas trigonométricas e hiperbólicas. Continuidad y derivada de la función inversa.

En este capítulo vamos a introducir funciones nuevas, construidas como inversas de funciones ya conocidas. Podremos estudiar su continuidad y calcular sus funciones derivadas, que en algunos casos importantes resultan funciones más sencillas que las propias funciones inversas.

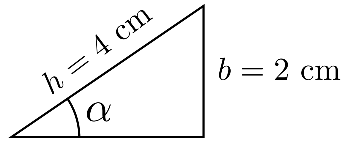
6.1 Funciones inversas

Contenidos de esta sección: repaso de funciones inyectivas, suryectivas y biyectivas. Funciones inversas. Inversas trigonométricas e hiperbólicas.

6.1.1 Noción de función inversa

En algunas ocasiones, cuando trabajamos con una función, surge la necesidad de averiguar con qué valor de la variable independiente se obtiene cierto resultado.

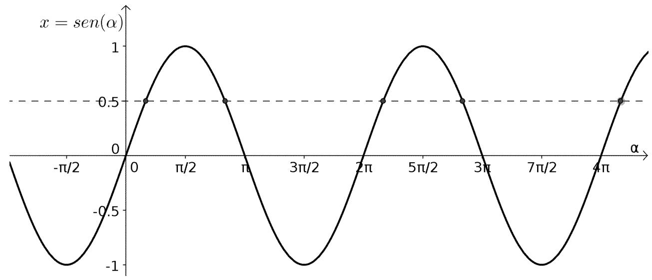
EJEMPLO 6.1.1.1. Se plantea un problema con un triángulo rectángulo, con uno de sus ángulos agudos llamado α. Se sabe que el cateto opuesto a ese ángulo mide $2\,cm$ y que la hipotenusa mide $4\,cm$, y se necesita calcular el ángulo α.



Con estos datos podemos construir el valor de la función seno,

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{2\,cm}{4\,cm} = \frac{1}{2}$$

La pregunta que nos interesa es ¿cuánto debe valer la variable α para que su seno valga $1/2$? En cierto sentido, necesitamos "despejar" el valor de α de la ecuación sen $(\alpha) = 0.5$.



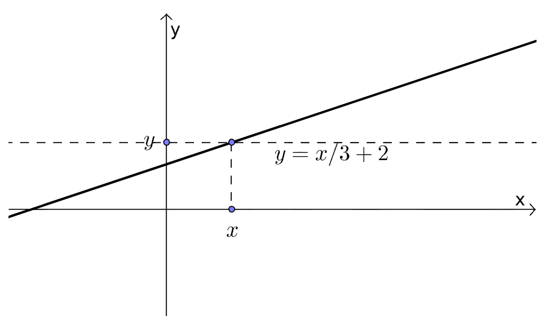
Observamos en la gráfica que existen muchos valores de α cuyo seno vale $1/2$. En este caso interesa un ángulo agudo, pero en otro caso podría necesitarse una respuesta del segundo cuadrante. La pregunta debe responderse con el debido cuidado.

Este tipo de situación nos lleva a las llamadas **funciones inversas**: dada una función $y = f(x)$ que expresa una variable dependiente y en función de una variable independiente x, nos preguntamos si podemos cambiar los roles de las variables para **expresar x en función de y**. Si podemos hacerlo, y a cada valor de y en cierto rango le corresponde uno y solo uno de x, tenemos una función inversa $x = f^{-1}(y)$. Veamos algunos ejemplos antes de formalizar estos conceptos.

EJEMPLO 6.1.1.2. Comencemos con una función sencilla: $y = f(x) = x/3 + 2$, donde x es la variable independiente e y es la variable dependiente. En primer lugar conviene identificar el dominio y la imagen de esta función: siendo su gráfica una recta, el dominio natural es $(-\infty, +\infty)$ y la imagen es $(-\infty, +\infty)$. Vamos a anotar la descripción completa de la función así:

$$\begin{array}{rcl} f : (-\infty, +\infty) & \rightarrow & (-\infty, +\infty) \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & y = x/3 + 2 \end{array}$$

(la última línea es una forma explícita de decir que $y = f(x)$).



Para construir una función inversa, intentamos asignar a cada valor y de la imagen de f un valor de x en el dominio de f. Gráficamente, dado un valor para y trazamos una recta horizontal a esa altura, buscamos su intersección con la gráfica y encontramos el correspondiente valor de x.

En este caso también podemos despejar algebraicamente x sin dificultad: si $y = x/3 + 2$, entonces

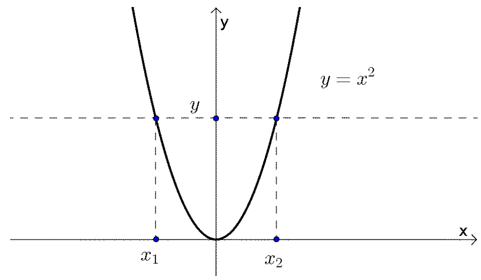
$$\begin{array}{rcl} x/3 & = & y - 2 \\ x & = & 3y - 6 \end{array}$$

Al despejar vemos que a cada y le corresponde un y solo un valor de x (calculado como $3y - 6$), esta relación tiene forma de función, con y como variable independiente; los valores de y tienen dominio $(-\infty, +\infty)$ y los resultados de x forman una imagen $(-\infty, +\infty)$. Tenemos una función inversa que podemos anotar

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : (-\infty, +\infty) & \rightarrow & (-\infty, +\infty) \\ \text{que a } y \text{ le asigna} & & x = 3y - 6 \end{array}$$

y se lee "**función inversa de** f, con dominio $(-\infty, +\infty)$ y codominio $(-\infty, +\infty)$, que a cada y le asigna un valor $x = 3y - 6$".

EJEMPLO 6.1.1.3. Sigamos con otra función sencilla: $y = f(x) = x^2$.



El dominio de esta función es $(-\infty, +\infty)$, y su imagen es $[0, +\infty)$. Tomemos esta imagen como codominio, y anotemos esta información escribiendo

$$\begin{array}{rcl} f : (-\infty, +\infty) & \to & [0, +\infty) \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & y = x^2 \end{array}$$

Para asignar un valor x a cada y de la imagen de g, como en el ejemplo anterior, trazamos una recta horizontal a la altura y y buscamos su intersección con la gráfica. Encontramos en este caso una dificultad: para cada $y > 0$, hay dos valores de x. También aquí podemos despejar x: si $y = x^2$, entonces

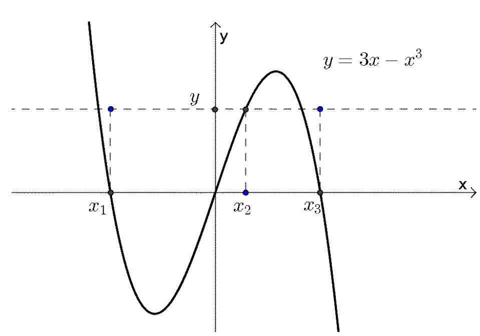
$$x = \pm\sqrt{y}$$

Al igual que en el razonamiento gráfico, encontramos dos valores de x para cada $y > 0$; esta relación no define una función, porque a cada valor positivo de y le corresponden dos valores de x.

Si insistimos en construir una función (como hicimos al definir la función $\sqrt{x}$ en el capítulo 1) tenemos que tomar una decisión y determinar con cuál de los resultados nos vamos a quedar. En ese caso se dice que elegimos una **rama de función inversa**.

EJEMPLO 6.1.1.4. En tercer lugar analicemos la función $y = f(x) = 3x - x^3$, con dominio $(-\infty, +\infty)$ e imagen $(-\infty, +\infty)$:

$$\begin{array}{rcl} f : (-\infty, +\infty) & \to & (-\infty, +\infty) \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & y = 3x - x^3 \end{array}$$



Tomando y como dato, no hay forma de despejar x a partir de la relación $y = 3x - x^3$. Sin embargo podemos razonar gráficamente: notamos que según el valor de y pueden corresponder uno, dos o tres valores distintos de x. Claramente esta relación no define a x como función de y.

Para construir una rama de función inversa, bien definida como función, deberíamos especificar el rango de valores de y que vamos a considerar (es decir, el dominio de la función inversa), y cuál de los posibles valores de x elegir cuando hay más de uno (lo que determina la imagen de la función inversa).

Estos ejemplos ilustran las dificultades que se enfrentan al intentar construir una función inversa de cierta función $y = f(x)$. Destacamos dos características:

- las gráficas permiten ver que a cada valor de y en la imagen de f le corresponden determinados valores de x, **incluso cuando no se los pueda despejar explícitamente**.
- en general habrá que imponer **restricciones** en los valores que puedan tomar las variables, para que la relación inversa sea una verdadera función.

Noten que en estos ejemplos y en cualquier otro hablamos tanto de una función como de su inversa, cambiando el rol de las letras x e y como variable independiente o dependiente, según corresponda. Cuando sea conveniente se puede usar una notación sugestiva que haga evidente el rol de las variables: sin usar los símbolos f o f^{-1}, se puede anotar $y(x)$ para escribir y **en función de** x y $x(y)$ para escribir x **en función de** y.

Actividades

ACTIVIDAD 6.1.1.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes consignas:

- Se suele decir que las funciones inyectivas son funciones "uno a uno". ¿Cómo pueden relacionar esta frase coloquial con la definición de función inyectiva?

ACTIVIDAD 6.1.1.2. Grafiquen la función $y = 2x + 3$.
Despejen x en términos de y. ¿Encuentran algún obstáculo en el cálculo?
Grafiquen la expresión $x(y)$ obtenida. ¿Es función?

6.1.2 Restricciones. Repaso de funciones inyectivas, suryectivas y biyectivas.

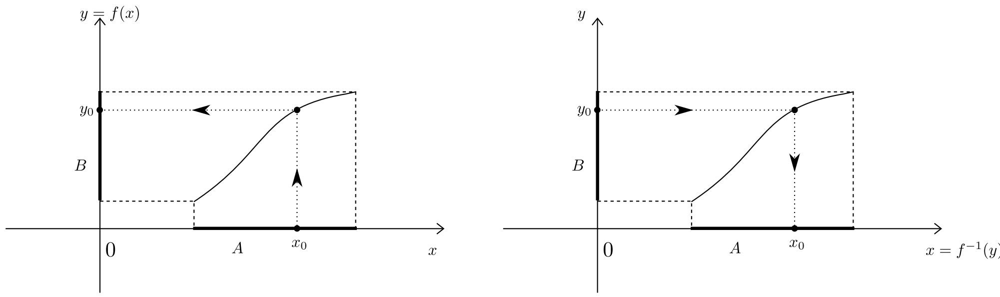
En esta sección discutimos las condiciones que se deben cumplir para que, dada una función

$$\begin{array}{rcl} f : A & \rightarrow & B \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & y = f(x) \end{array}$$

sea posible definir una función inversa

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : B & \rightarrow & A \\ \text{que a } y \text{ le asigna} & & x = f^{-1}(y) \end{array}$$

Gráficamente, sabiendo que f toma cada valor de x en A y le asigna un determinado valor de y en B (figura izquierda), debemos asegurar que **a cada** y en B se le pueda asignar un **determinado valor** x en A tal que f aplicado a ese x nos devuelva y. Podemos representar esta idea cambiando el sentido de las flechas de asignación (figura derecha):



Las condiciones para poder definir una función inversa $f^{-1} : B \to A$ se desprenden de la definición de función, y son las siguientes:

- En primer lugar, es necesario que a cada valor de y en B se le pueda asignar al menos un valor de x: debe existir algún x en A tal que $f(x) = y$. Gráficamente, una recta horizontal de altura $y \in B$ debe tener al menos una intersección con la gráfica de la función f.

Esto significa que la función $f : A \to B$ que queremos invertir debe alcanzar **todos** los valores de su codominio B. En palabras, la imagen de f debe coincidir con el codominio declarado al definir la función. Como vimos en el capítulo 1, esta característica se llama **suryectividad**:

Dada una función $f : A \to B$, se dice que f es **suryectiva** *cuando $\mathbf{Im}\, f = B$.*

- En segundo lugar, es necesario que a cada valor de y en B se le asigne solo un valor de x: no deben existir x_1 y x_2 distintos en A tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Gráficamente, una recta horizontal de altura $y \in B$ no puede tener más de una intersección con la gráfica de la función f.

Esto significa que la función $f : A \to B$ no puede tomar dos veces el mismo valor en A. Dicho de otro modo, la función no repite valores: a distintos x en A les deben corresponder valores distintos de y. Como también mencionamos en el capítulo 1, esta característica se llama **inyectividad**:

Dada una función $f : A \to B$ con regla de asignación $y = f(x)$, se dice que la función es **inyectiva** *cuando a valores distintos de $x \in A$ les corresponden valores distintos de $y \in B$.*

EJEMPLO 6.1.2.1. Retomemos el ejemplo 6.1.1.3, con la gráfica vista más arriba. La parábola canónica $y = x^2$ tiene como dominio natural todos los reales y como imagen el intervalo $[0, +\infty)$ de reales no negativos.

Si consideramos la función definida como

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & y = x^2 \end{array}$$

estamos diciendo que el codominio es $\mathbb{R}$. En consecuencia f no es suryectiva: el dominio declarado $\mathbb{R}$ tiene más elementos que la imagen $[0, +\infty)$.

Por otro lado, vemos que la función es par: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Como se repite el valor de y cada vez que tomamos un valor de x y su opuesto $-x$, por ejemplo $f(-2) = f(2) = 4$, f no es inyectiva.

Así definida, esta función f no cumple las condiciones para definir una función inversa: no es suryectiva, y tampoco es inyectiva. Si realmente queremos construir una inversa, es necesario aplicar **restricciones** al dominio y al codominio.

Es sencillo solucionar el problema de que una función no sea suryectiva. Una vez que conocemos la imagen de f, la usamos como codominio definiendo una nueva función

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f} : \mathbb{R} & \to & [0, +\infty) \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & y = x^2 \end{array}$$

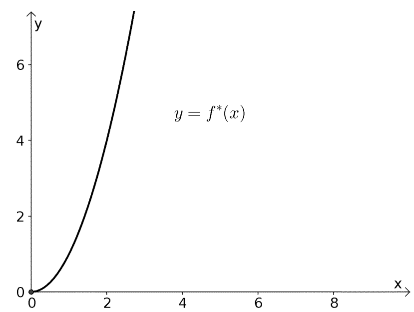
Por construcción, ahora la imagen y el codominio son iguales. A este procedimiento se lo llama **restringir el codominio** de f. Noten que al restringir el codominio no perdemos información, simplemente eliminamos los valores de y que no aparecen en la gráfica de f.

También podemos solucionar el problema de que una función no sea inyectiva: necesitamos eliminar valores de x, para evitar que haya dos x con el mismo valor de y. En este ejemplo podemos conservar los x del intervalo $[0, +\infty)$ y descartar los x en el intervalo $(-\infty, 0)$, definiendo

$$\begin{array}{rcl} f^* : [0, +\infty) & \to & [0, +\infty) \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & y = x^2 \end{array}$$

A este procedimiento se lo llama **restringir el dominio** de f. Noten que al restringir el dominio sí perdemos información, porque eliminamos puntos de la gráfica de f.

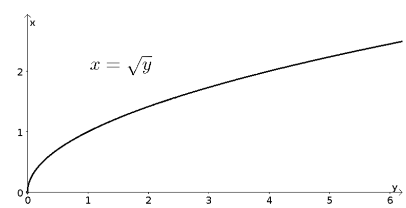
La gráfica de la función restringida f^*, dibujando como ejes solo su dominio y su codominio, es



La función f^*, tal como la hemos restringido, resulta suryectiva y también inyectiva. Se puede construir una inversa

$$\begin{array}{rcl} (f^*)^{-1} : [0, +\infty) & \to & [0, +\infty) \\ \text{que a } y \text{ le asigna} & & x = +\sqrt{y} \end{array}$$

La gráfica de la función inversa es bien conocida, se trata de la raíz cuadrada positiva discutida en el capítulo 1.



Si hubiéramos elegido otra restricción del dominio de $\tilde{f}$ tendríamos otra rama de la función inversa con distinta regla de asignación. Por ejemplo, eligiendo $x \in (-\infty, 0]$, la regla de asignación sería $x = -\sqrt{y}$. Esta segunda elección contiene la información que perdimos en la primera.

Este ejemplo nos aclara dos puntos importantes sobre la suryectividad. Primero, que para discutir si una función es suryectiva no basta conocer su fórmula, sino que debemos **aclarar con qué codominio está definida**; solo así podremos comparar su imagen con el codominio declarado. Segundo, que dada una función con regla de asignación $y = f(x)$ siempre podemos construir otra función con la misma fórmula que sea suryectiva: debemos averiguar cuál es su imagen, y luego restringir su codominio descartando los valores de y que nunca aparezcan como resultado de evaluar $f(x)$. En esta restricción no se pierde información.

Igualmente, este ejemplo nos aclara dos puntos importantes sobre la inyectividad. Primero, que para discutir si una función es inyectiva no basta conocer su fórmula, sino que debemos tener claro **cuál es su dominio**. Segundo, que dada una función con regla de asignación $y = f(x)$ siempre es posible construir otra función con la misma fórmula que sea inyectiva: tenemos que restringir su dominio **conservando un solo valor de** x para cada resultado y que aparezca en la imagen de f. Sin embargo, restringir el dominio tiene un costo evidente: se pierde información, porque hay regiones del eje x que quedan fuera de consideración. La función restringida no contiene ninguna información sobre esas regiones. Distintas restricciones del dominio de $y = f(x)$ conducen a distintas **ramas de función inversa**. En un problema de aplicación, será muy importante elegir la rama de función inversa que conserve el rango de la variable que intentamos describir.

Las funciones f, $\tilde{f}$ y f^* que discutimos en el ejemplo son funciones distintas, porque tienen la misma fórmula pero distinto dominio. Para aliviar la notación, en general no usaremos tantos símbolos para distinguir una función original f y sus versiones restringidas. En cambio, usaremos la forma $f : A \to B$, con la misma letra f pero **aclarando siempre el dominio y codominio** elegidos.

Las condiciones de suryectividad y de inyectividad son ambas necesarias para construir una función inversa. Para referirse a las dos se define la **biyectividad**:

> *Dada una función $f : A \to B$, se dice que la función es* **biyectiva** *cuando es inyectiva y suryectiva a la vez.*

Resumiendo, cuando una función $f : A \to B$ con fórmula $y = f(x)$ es biyectiva se cumplen las condiciones para construir una función inversa: se verifica que cada valor de y en el conjunto B aparece como imagen de un y solo un valor x del conjunto A. Se dice que hay una correspondencia biunívoca entre los conjuntos A y B: a cada elemento de A le corresponde un y solo un elemento de B, a la vez que a cada elemento de B le corresponde un y solo un elemento de A.

Actividades

Actividad 6.1.2.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes consignas:

- Se suele decir que las funciones inyectivas son funciones "uno a uno". ¿Cómo pueden relacionar esta frase coloquial con la definición de función inyectiva?
- Si una función no es inyectiva, ¿cómo se logra que una restricción que sí sea inyectiva?
- Si una función no es suryectiva, ¿cómo se logra que una restricción que sí sea suryectiva?

Actividad 6.1.2.2. Consideren la función $y = f(x) = x^3 + 3x$.

- Verifiquen que f es biyectiva en su dominio natural. ¿Cuál es el codominio adecuado?
- Calculen $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$.
- ¿Pueden despejar algebraicamente x en función de y?
- Aunque no puedan despejar x, calculen $f^{-1}(4)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(-4)$.
- Grafiquen f e interpreten los resultados obtenidos al evaluar f^{-1} en los puntos dados.

6.1.3 Definición de función inversa

Con lo que hemos discutido en la sección anterior estamos en condiciones de definir:

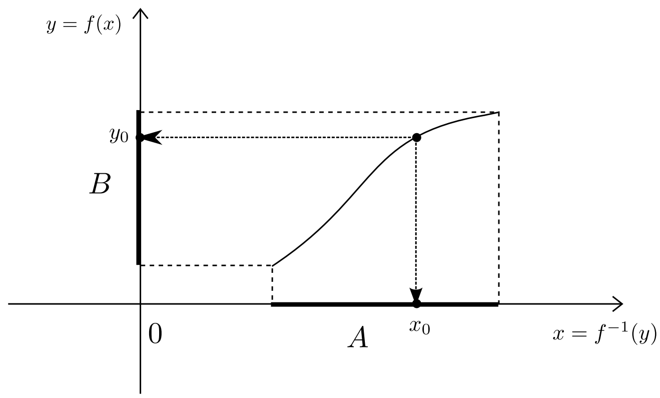
> *Cuando una función $f : A \to B$ es biyectiva, se dice que es* **invertible**. *Dada*
>
> $$\begin{array}{rcl} f : A & \to & B \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & y = f(x) \end{array}$$
>
> *su* **función inversa** *se define como*
>
> $$\begin{array}{rcl} f^{-1} : B & \to & A \\ \text{que a } y \text{ le asigna el único valor} & x & \text{tal que } f(x) = y \end{array}$$

En esta definición, el dominio de f pasa a ser la imagen de f^{-1} y la imagen de f pasa a ser el dominio de f^{-1}.

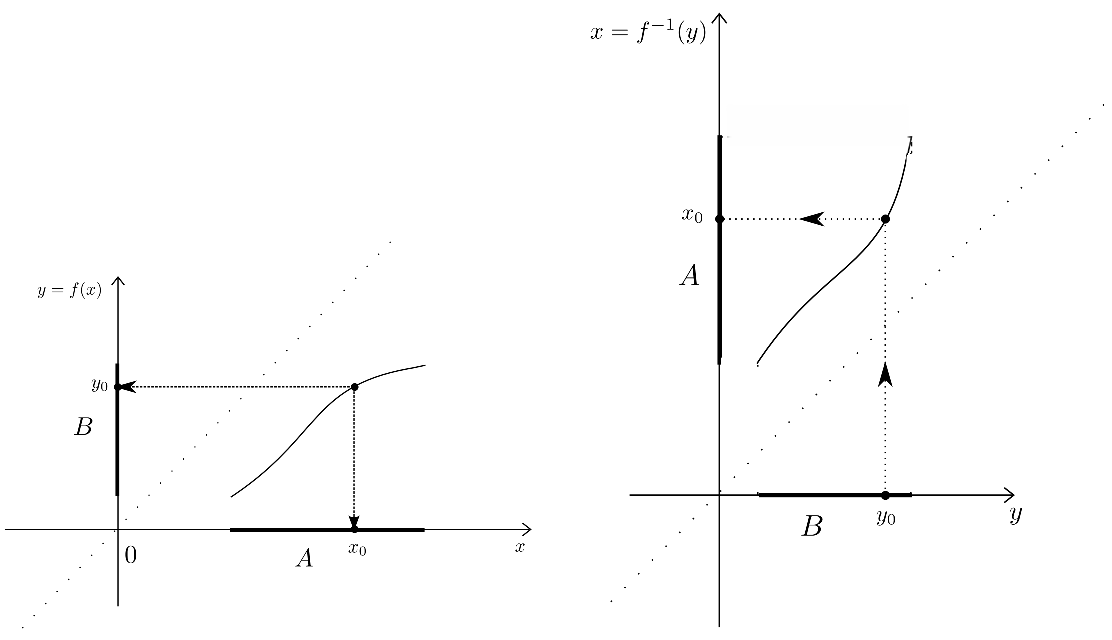
Noten que la función compuesta $f^{-1}(f(x))$ está definida con dominio A: a cada x en A, f le asigna un y en B, y luego f^{-1} le vuelve a asignar el x original. En símbolos,

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para todo } x \in A$$

En este sentido, tenemos un juego de ida y vuelta. Una función $f : A \to B$ biyectiva se puede graficar junto con su inversa $f^{-1} : B \to A$ como una sola curva, con flechas que indiquen la relación en ambos sentidos. Por ejemplo, juntando las gráficas mostradas al comienzo de la sección 6.1.2, podemos graficar:



Para destacar el rol de y como variable independiente de la función inversa $x = f^{-1}(y)$ es usual "enderezar" su gráfica poniendo la variable independiente y como eje horizontal, y la variable dependiente x como eje vertical. Podemos imaginar la gráfica anterior dibujada en papel de calcar, dar vuelta la hoja y acomodar los ejes. Las gráficas de la función original y de la función inversa, por separado y cada una con sus flechas, se ven así:



La recta punteada $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes) se agrega como ayuda visual: al intercambiar los ejes, la gráfica de la función inversa aparece reflejada respecto de esa recta. Cuando $f(x_0) = y_0$, entonces $f^{-1}(y_0) = x_0$; en este sentido el punto (x_0, y_0) en la gráfica izquierda tiene la misma información que el punto (y_0, x_0) en la gráfica derecha.

Observación: la función inversa f^{-1} que hemos construido resulta biyectiva, y por lo tanto admite su propia inversa. Pueden verificar, usando la definición, que la inversa de f^{-1} es la función f original. Por eso,

$$f(f^{-1}(y)) = y \text{ para todo } y \in B$$

Observación: una vez construida la función inversa, en ocasiones querremos usar la letra x como variable independiente. O sea, tratar a la función inversa como a cualquier función, donde estamos acostumbrados a escribir x como variable. Es usual intercambiar las letras y escribir $y = f^{-1}(x)$ (y correspondería escribir $x = f(y)$); tengan cuidado, esto es un motivo frecuente de confusión al estudiar inversas.

En este capítulo vamos a mantener en general la notación $x = f^{-1}(y)$ para recordar que hemos invertido una función $y = f(x)$.

Actividades

ACTIVIDAD 6.1.3.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes consignas:

- Dada una función biyectiva $f : A \to B$ y su inversa $f^{-1} : B \to A$,
  - Construyan la función compuesta $f^{-1}(f(x))$, detallando su dominio y codominio.
  - Construyan la función compuesta $f(f^{-1}(y))$, detallando su dominio y codominio.
  - Revisando la definición de función inversa, comenten lo que observan.

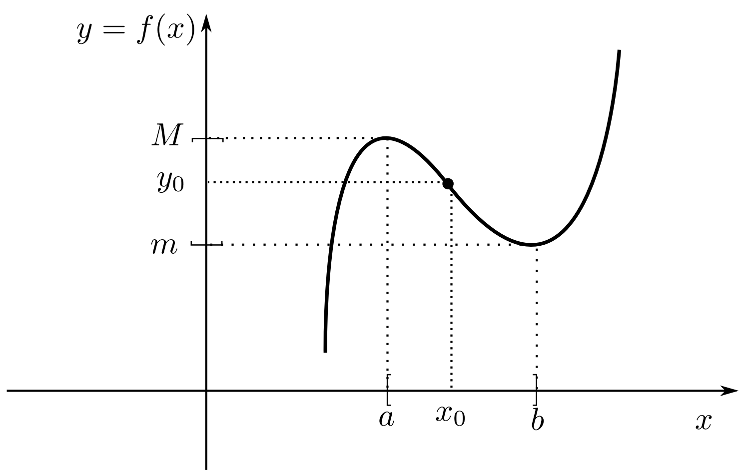
6.1.4 Condiciones prácticas para determinar una rama de función inversa

Volvamos a considerar ahora funciones que no sean biyectivas, con el propósito de encontrar restricciones adecuadas para construir una rama biyectiva. Según la restricción elegida, se conserva **solamente una parte de la gráfica de la función original**; asociada a esa parte biyectiva de la gráfica se obtiene una rama de función inversa.

EJEMPLO 6.1.4.1. Veamos cómo identificar un tramo de la gráfica de una función donde la misma sea invertible. Consideremos una función continua

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \text{que a } x \text{ le asigna} \quad & y = f(x) \end{aligned}$$

con una gráfica



y supongamos que nos interesa trabajar con un tramo que incluya el punto (x_0, y_0). Viendo que la gráfica muestra un valor máximo M en $x = a$ y un valor mínimo m en $x = b$, y que es **continua y decreciente** en el tramo que une esos extremos, podemos hacer una restricción del dominio al intervalo $[a, b]$ y asegurar que en este nuevo dominio f no repite valores (es inyectiva).

La imagen del intervalo $[a, b]$ en el eje x resulta un intervalo cerrado $[m, M]$ en el eje y; podemos hacer una restricción del codominio de f al intervalo $[m, M]$ y asegurar que $f(x)$ con dominio $[a, b]$ alcanza todos los valores de y en $[n, M]$ (es suryectiva). Luego, la función restringida

$$\begin{array}{rcl} f: [a,b] & \to & [m,M] \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & y = f(x) \end{array}$$

resulta biyectiva, y tiene sentido buscar su inversa.

Lo mismo podríamos hacer en un tramo donde la función fuera **continua y creciente**.

El ejemplo ilustra gráficamente una forma de encontrar restricciones que hagan invertible una función. Podemos enunciar la situación general como sigue:

Si una función f con regla de asignación $y = f(x)$ es continua y estrictamente monótona (o bien estrictamente creciente o bien estrictamente decreciente) en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces por el Teorema del Valor Extremo alcanza un valor mínimo m y un valor máximo M en los extremos de ese intervalo.
La **restricción del dominio** *de f al intervalo $[a, b]$ y del* **codominio** *de f al intervalo $[m, M]$ produce una función* **biyectiva**

$$\begin{array}{rcl} f: [a,b] & \to & [m,M] \\ \textit{que a } x \textit{ le asigna} & & y = f(x) \end{array}$$

y por lo tanto **admite función inversa**.

Recuerden que vimos en el Capítulo 4 las herramientas adecuadas para identificar extremos y tramos de continuidad y crecimiento monótono de cualquier función. **Con esas herramientas podemos determinar los distintos tramos donde una función admite función inversa**.

Por otro lado, cuando f es continua y estrictamente monótona en un intervalo A abierto o semiabierto también se pueden hallar restricciones biyectivas. Sin embargo, en esos casos no se puede asegurar la existencia de un máximo y un mínimo absolutos para describir la imagen adecuada. La determinación de la imagen debe hacerse con más cuidado, analizando límites laterales en los bordes abiertos del intervalo. No nos parece conveniente dar reglas generales, sino que les sugerimos estudiar el crecimiento y la presencia de extremos caso por caso.

Las propiedades discutidas permiten determinar restricciones para que una función $y = f(x)$ sea biyectiva. La función inversa existe, pero no se afirma que se pueda despejar algebraicamente x en función de y. **Es importante reconocer que la función inversa existe, aunque no podamos despejar su fórmula**.

Actividades

ACTIVIDAD 6.1.4.1. Para fijar conceptos, elaboren la siguiente pregunta:

- ¿Qué condiciones sencillas aseguran que un tramo de la gráfica de una función sea una restricción invertible?

ACTIVIDAD 6.1.4.2. Dada la función $y(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$,

- Comprueben que $(x, y) = (2, 1)$ pertenece a la gráfica de $y(x)$.
- Hallen el mayor intervalo donde la función $y(x)$ admite una función inversa $x(y)$ tal que $x(1) = 2$.
- ¿Cuáles son el dominio y el codominio de la función $x(y)$ caracterizada en el inciso anterior?

ACTIVIDAD 6.1.4.3. Grafiquen la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

- ¿Pueden despejar x en función de y?
- Determinen cuatro restricciones distintas que permitan definir ramas de y en función de x tales que sean invertibles. Para cada una, indiquen dominio y codominio de $y(x)$ y de su inversa $x(y)$.
- En cada rama, den la expresión de $y(x)$ y de $x(y)$ (deberán elegir con buen criterio los signos de cada raíz cuadrada)

GEOGEBRA 6.1.4.4. Dada una función $y = f(x)$, pueden construir con GeoGebra la gráfica de una rama de la función inversa:

En primer lugar, pueden definir una restricción del dominio al intervalo $[a, b]$, y llamarla $g(x)$, con el comando condicional

```
g(x)=Si[a<=x<=b,f(x)]
```

En segundo lugar, definan la recta bisectriz del primer cuadrante con el comando

```
r: y=x
```

En tercer lugar, reflejen la gráfica de g respecto de la recta r con el comando

```
Refleja[fr,r]
```

Apliquen estos pasos para construir dos ramas distintas de la inversa de $y = \cos x$.

6.2 Inversas de las funciones especiales

6.2.1 Función exponencial natural y función logaritmo natural

Es momento de repasar cómo introdujimos tempranamente las funciones exponencial natural y logaritmo natural en el capítulo 1. Recuerden que presentamos en forma gráfica, sin definición formal, la función exponencial natural $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, con regla de asignación $\exp(x) = e^x$. Observen ahora que, sin necesidad de restricciones, la exponencial natural es una función biyectiva:

- por ser estrictamente creciente en todo su dominio $\mathbb{R}$ no repite valores, es decir que es inyectiva
- por tener $\lim_{x\to-\infty} = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$ alcanza todos los valores del codominio $(0, +\infty)$, es decir que es suryectiva

Entonces existe la función inversa de la función exponencial natural, **definida** como

$$\begin{array}{rccc} \exp^{-1} : & (0, +\infty) & \to & \mathbb{R} \\ \text{que a } y \text{ le asigna el único valor} & \exp^{-1}(y) = x & \text{tal que} & \exp(x) = y \end{array}$$

Y como habrán reconocido, esta función inversa tiene un nombre propio: es la función que hemos llamado logaritmo natural.

Recíprocamente, si comenzamos aceptando que existe la función logaritmo natural $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ y observamos que es biyectiva, podemos **definir** la exponencial natural como su inversa

$$\begin{array}{rccc} \exp : & \mathbb{R} & \to & (0, +\infty) \\ \text{que a } y \text{ le asigna el único valor} & \exp(y) = x & \text{tal que} & \ln(x) = y \end{array}$$

El problema formal de definir las funciones exponencial y logaritmo natural se reduce así a definir **una** de ellas, luego la otra se definirá como su inversa. Más adelante, en el capítulo 9, veremos cómo se define rigurosamente la función logaritmo natural.

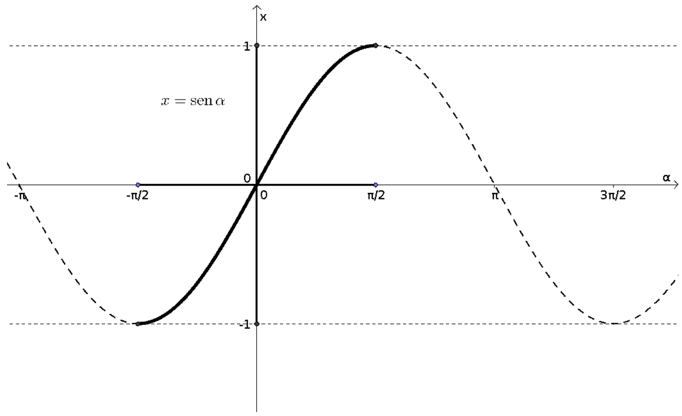
6.2.2 Inversas de las funciones trigonométricas

Entre las funciones inversas de uso más frecuente están las inversas del seno, el coseno y la tangente. Para que se familiaricen con ellas las presentaremos en detalle, aplicando el contenido de las secciones anteriores. Además usaremos una notación particular: dado que las funciones trigonométricas se aplican a ángulos, y sus resultados son números reales (sin unidades) nos parece conveniente en esta presentación usar la letra griega α para anotar ángulos y la letra x para anotar el resultado de las distintas funciones trigonométricas.

Función arco seno

La función inversa del seno, con las debidas restricciones, se llama **arco seno**. Si llamamos $x =$ sen α, la función inversa arco seno se anota $\alpha =$ arcsen(x). Su nombre se refiere al **arco** (o ángulo en radianes) α tal que sen $\alpha = x$. Como mencionamos en el primer ejemplo de esta sección, la función arcsen(x) permite "despejar" el ángulo α en términos del valor x de su seno.

Ya conocemos la función $x =$ sen α y sabemos que que es continua pero no es inyectiva: dado un valor de x existen distintos α tales que sen $\alpha = x$. Para definir la función arco seno es necesario hacer restricciones: necesitamos un intervalo de ángulos donde la función $x =$ sen α sea inyectiva, y para eso basta con seleccionar un tramo de la gráfica donde sen α sea estrictamente creciente, o bien sea estrictamente decreciente (es decir, donde la derivada sen$'(\alpha) = \cos\alpha$ mantenga su signo). Para poder trabajar en el primer cuadrante, la elección usual es el intervalo $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, donde la función sen α es creciente y su imagen de es $[-1, 1]$.

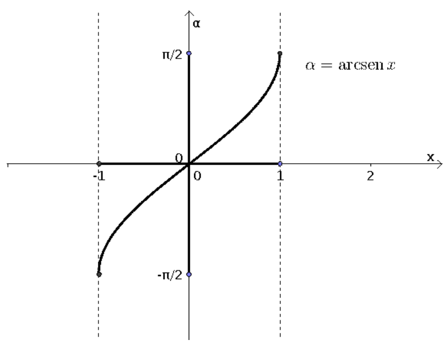


Aunque no podemos despejar α algebraicamente de la ecuación $x =$ sen α, con estas restricciones observamos un único ángulo α que la satisface, es decir que la función inversa existe.

Con estas restricciones se define la **rama principal del arco seno** como

$$\begin{array}{rcl} \text{arcsen} : [-1,1] & \to & [-\pi/2, \pi/2] \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & \alpha \in [-\pi/2, \pi/2] \text{ tal que sen}\alpha = x \end{array}$$

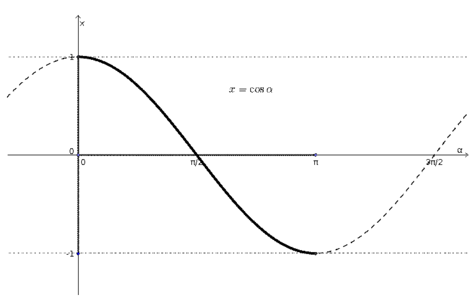
Su gráfica, invirtiendo los ejes de la gráfica de $x =$ senα, resulta



Para trabajar con la función arco seno deben primero recordar su gráfica, y para dar valores numéricos deberán recurrir a la calculadora (que tiene programada esta rama principal y da valores redondeados a varios decimales). Algunos puntos de la gráfica, asociados a los ángulos notables, se conocen en forma exacta. Por ejemplo, arcsen$(0) = 0$ porque sen$(0) = 0$; arcsen$(\sqrt{2}/2) = \pi/4$ porque sen$(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, etc.

Función arco coseno

La función **arco coseno** es la función inversa del coseno, con las debidas restricciones. Comencemos con la gráfica de la función $x = \cos\alpha$:

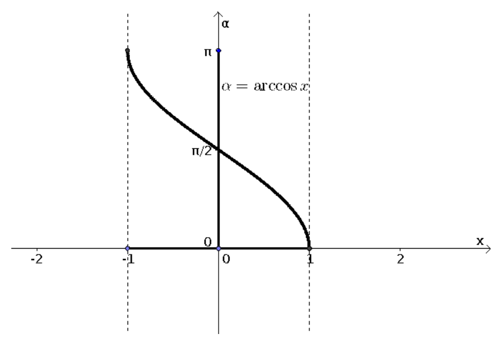


donde marcamos la restricción $\alpha \in [0, \pi]$ que incluye el primer cuadrante y el mayor intervalo en que $x = \cos(\alpha)$ se mantiene decreciente (la derivada $\cos'(\alpha) = -\text{sen}\alpha$ es negativa). También marcamos la imagen de ese intervalo, $x \in [-1, 1]$. Estas restricciones permiten definir la **rama principal del arco coseno** como

$$\begin{array}{rcl} \text{arccos}: [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & \alpha \in [0,\pi] \;\text{ tal que }\; \cos\alpha = x \end{array}$$

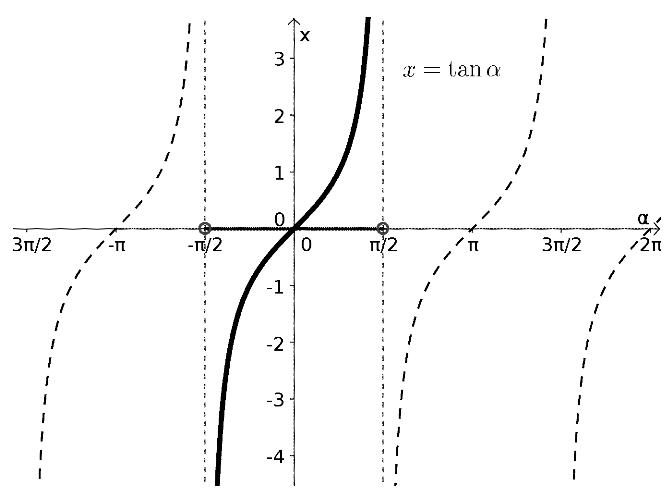
Algunos valores exactos de esta función son, por ejemplo: arccos$(0) = \pi/2$ porque $\cos(\pi/2) = 0$; arccos$(-1) = \pi$ porque $\cos(\pi) = -1$; etc.

Su gráfica completa, obtenida por reflexión o generada con computadora, resulta



Función arco tangente

La función **arco tangente** es la inversa de la función tangente, con las debidas restricciones. Ya sabemos cómo proceder: sobre la gráfica de la función $x = \tan(\alpha)$

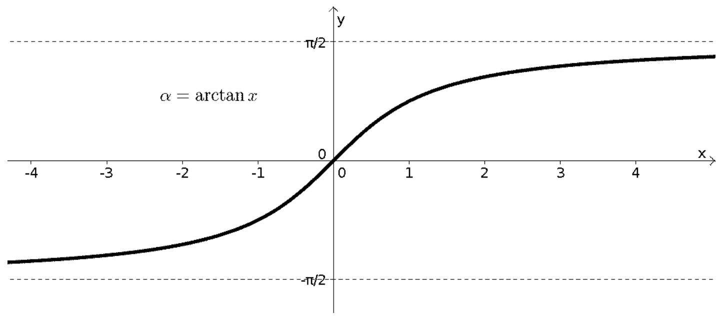


elegimos un tramo que incluya el primer cuadrante, tal que la función $x = \tan\alpha$ se mantenga continua y creciente; la restricción adecuada es $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$. En este caso se trata de una función continua en un intervalo abierto, por lo que no contamos con el Teorema del Valor Extremo para asegurar un mínimo y un máximo absolutos. Para evaluar la imagen de $x = \tan\alpha$ en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ tenemos que calcular límites laterales; como $\lim_{\alpha\to-\pi/2^+} \tan\alpha = -\infty$ y $\lim_{\alpha\to\pi/2^-} \tan\alpha = +\infty$, la imagen es $(-\infty, +\infty)$ y no es necesario restringir el codominio.

Se define la **rama principal del arco tangente** como

$$\begin{array}{rcl} \text{arctan} : (-\infty, +\infty) & \to & (-\pi/2, \pi/2) \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & \alpha \in (-\pi/2, \pi/2) \text{ tal que } \tan\alpha = x \end{array}$$

Su gráfica resulta



Observen que, por esta construcción,

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\pi/2 \ \text{ y } \ \lim_{x\to+\infty} \arctan x = +\pi/2$$

En consecuencia, la función arco tangente posee las dos asíntotas horizontales que marcamos con línea de puntos : $y = -\pi/2$ hacia la izquierda e $y = \pi/2$ hacia la derecha.

Otras ramas de inversas trigonométricas y uso de la calculadora

Las restricciones que hemos usado para definir arco seno, arco coseno y arco tangente son las usuales, pero no son las únicas posibles. Se las llama ramas principales, y son las que se encuentran en calculadoras y lenguajes de computación (en particular en GeoGebra).

Otras ramas posibles darán distintos resultados. Por ejemplo, se puede definir una inversa de $x = \cos\alpha$ con codominio $\alpha \in [\pi, 2\pi]$; o una inversa de la función $x = \tan\alpha$ con codominio $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$. Cuando necesiten invertir una función trigonométrica en un problema específico, bien puede ser que la solución buscada caiga fuera del codominio de las ramas principales (por ejemplo, en el tercer cuadrante). En esos casos, si usan calculadora, habrá que establecer una relación entre el resultado que obtienen y el que realmente necesitan para resolver el problema. El lenguaje gráfico (circunferencia trigonométrica o gráficas de funciones trigonométricas) les va a permitir encontrar la relación adecuada.

Actividades

Actividad 6.2.2.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes preguntas:

- ¿Qué resultados puede dar una calculadora para la función arcsen(x)? ¿Por qué se considera conveniente esa restricción?
- ¿Qué resultados puede dar una calculadora para la función arccos(x)? ¿Por qué se considera conveniente esa restricción?
- ¿Qué resultados puede dar una calculadora para la función arctan(x)? ¿Por qué se considera conveniente esa restricción?

Actividad 6.2.2.2. Calculen arccos(0), arccos$(\sqrt{3}/2)$, arcsen(1), arcsen$(1/2)$, arctan$(\sqrt{3})$. Intenten referirse a las funciones trigonométricas exactas de los ángulos notables 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$.

Dado que $\tan\pi = 0$, ¿por qué no obtienen con la calculadora arctan$(0) = \pi$?

Actividad 6.2.2.3. En un problema necesitan averiguar un ángulo β del tercer o cuarto cuadrante, a partir del valor x de su coseno.

(a) Calculen el ángulo β sabiendo que $x = \cos\beta = \sqrt{3}/2$.
(b) Den la expresión de β en función de x, para $x \in [-1, 1]$ (relacionando el resultado buscado con la rama principal del arco coseno)

ACTIVIDAD 6.2.2.4. Calculen los siguientes límites:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$; $\quad (b) \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$; $\quad (c) \lim\limits_{x\to0^-} \arctan\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$.
- ¿Alguna de estas funciones posee asíntota horizontal, o vertical? De ser así, grafiquen las asíntotas y escriban sus ecuaciones.

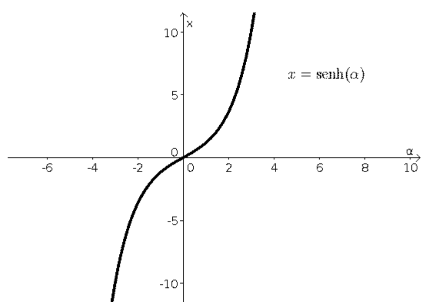
GEOGEBRA 6.2.2.5. Las funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas se trabajan en GeoGebra con la notación:
`asin(x), acos(x), atan(x).`

6.2.3 Inversas de las funciones hiperbólicas

Para completar esta clase, vamos a repasar las funciones hiperbólicas y presentar sus inversas. En analogía con las trigonométricas, usaremos la letra α como argumento de las funciones hiperbólicas, y la letra x como resultado.

Función argumento seno hiperbólico

Recuerden la gráfica de la función $x = \text{senh}(\alpha) \equiv (e^\alpha - e^{-\alpha})/2$ que mencionamos en el capítulo 1:



Esta función es continua y derivable, con $\text{senh}'(\alpha) = \cosh(\alpha) > 0$ en todo el eje real. Como es creciente en todo su dominio $\mathbb{R}$, es inyectiva. Por otro lado, los límites

$$\lim_{\alpha\to-\infty} \text{senh}(\alpha) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{\alpha\to+\infty} \text{senh}(\alpha) = +\infty$$

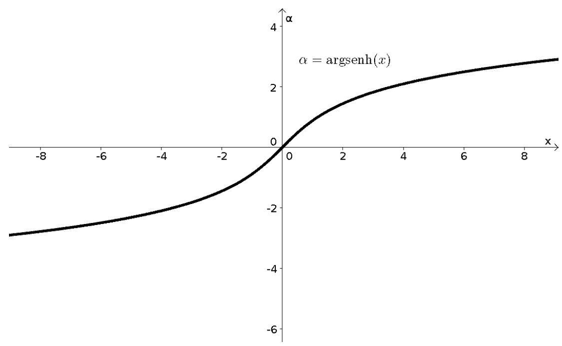
indican que la imagen del seno hiperbólico es todo el eje real. Esta función es biyectiva sin necesidad de restricciones y existe la función inversa, que se llama[1] **argumento seno hiperbólico**.

Se define el argumento seno hiperbólico como

$$\begin{array}{rcl} \text{argsenh}:\ (-\infty, +\infty) & \to & (-\infty, +\infty) \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & \alpha \ \text{ tal que } \ \text{senh}\alpha = x \end{array}$$

Cuando se conoce un valor de $\text{senh}(\alpha) = x$, la función inversa nos devuelve el **argumento** α del seno hiperbólico en función de x. Su gráfica resulta

[1] También pueden encontrarla como arco seno hiperbólico.



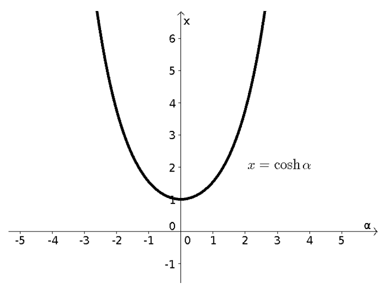
Los límites de $x = \text{senh}(\alpha)$ calculados más arriba muestran que α arbitrariamente grande se corresponde con un x arbitrariamente grande. Recíprocamente

$$\lim_{x \to +\infty} \text{arcsenh}(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \text{arcsenh}(x) = -\infty$$

Esta función, a pesar de su apariencia, no tiene asíntotas horizontales.

Función argumento coseno hiperbólico

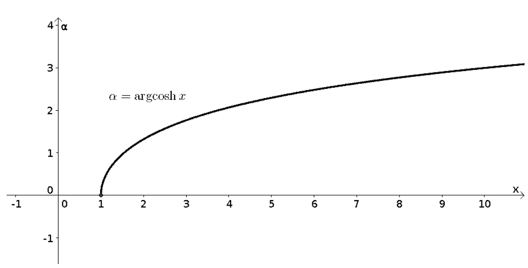
Comenzamos con la gráfica de la función $x = \cosh(\alpha) \equiv (e^{\alpha} + e^{-\alpha})/2$:



(noten que, aunque se vea parecida, no es una parábola). La función es continua y derivable, con $\cosh'(\alpha) = \text{senh}(\alpha)$ en todo el eje real. Esta derivada es positiva en $(0, +\infty)$, por lo que $\cosh(\alpha)$ es creciente en $[0, +\infty)$. Además, la imagen de este intervalo resulta $[1, +\infty)$. En consecuencia tenemos una restricción biyectiva que permite definir la **rama principal del argumento coseno hiperbólico** como

$$\begin{array}{rcl} \text{argcosh} : [1, +\infty) & \to & [0, +\infty) \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & \alpha \ \text{ tal que } \cosh\alpha = x \end{array}$$

Su gráfica resulta

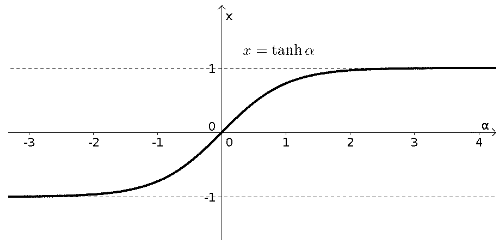


Función argumento tangente hiperbólica

La función $x = \tanh(\alpha) = \dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}$ está definida en todo el eje real. Su derivada es siempre positiva, por lo que la función es estrictamente creciente en todo su dominio. Tiene dos asíntotas horizontales, pueden verificar que

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1 \text{ y } \lim_{x \to +\infty} \tanh x = 1$$

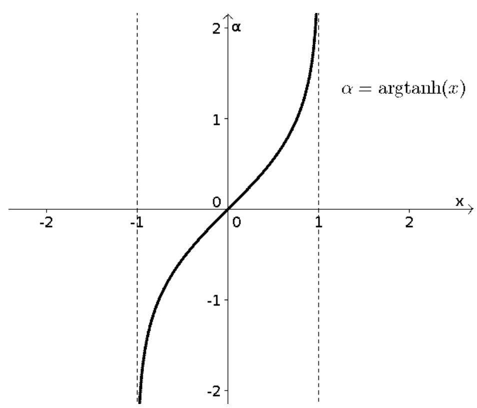
En consecuencia su imagen es el intervalo $(-1, 1)$. Su gráfica es



Su función inversa, llamada **argumento tangente hiperbólico**, se define como

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{argtanh}: (-1,1) & \to & (-\infty, +\infty) \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & \alpha \text{ tal que } \tanh\alpha = x \end{array}}$$

Su gráfica resulta



y presenta asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 1$.

Actividades

GeoGebra 6.2.3.1. Las funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas se trabajan en GeoGebra con la notación:

`asinh(x), acosh(x), atanh(x).`

A partir de sus gráficas, discutan cuáles serán sus inversas.

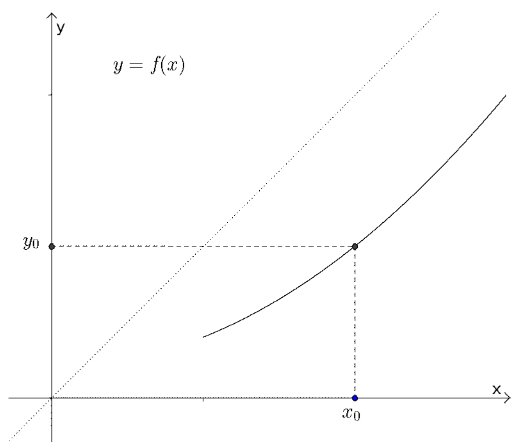
6.3 Continuidad y derivada de funciones inversas

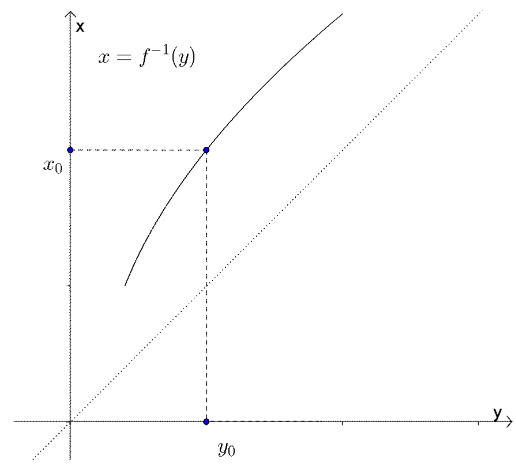
Contenidos de esta sección: continuidad de la función inversa. Existencia y cálculo de la derivada de funciones inversas. Derivada de las funciones inversas trigonométricas e hiperbólicas.

Dada una función $y = f(x)$ biyectiva, podemos definir su inversa $x = f^{-1}(y)$ pero no siempre podemos "despejar" x para darle una fórmula explícita. En esta sección vamos a aprovechar las propiedades de la función original f, que suponemos conocida y nos permite trabajar explícitamente, para encontrar propiedades de la función inversa f^{-1}.

6.3.1 Continuidad de la función inversa

Grafiquemos una función $f : A \to B$ con regla de asignación $y = f(x)$, biyectiva, y también su inversa $f^{-1} : B \to A$ con regla de asignación $x = f^{-1}(y)$.





Los gráficos están relacionados por una reflexión respecto de la bisectriz del primer cuadrante. Supongamos que la función $y = f(x)$ es continua en el punto x_0 de su dominio. Gráficamente, esto significa que su trazo no se corta en el punto (x_0, y_0). La gráfica de la función inversa, después de la reflexión, tampoco se corta en el punto reflejado (y_0, x_0). Es decir, la función inversa $x = f^{-1}(y)$ es continua en el punto y_0 de su dominio. Podemos enunciar la siguiente propiedad:

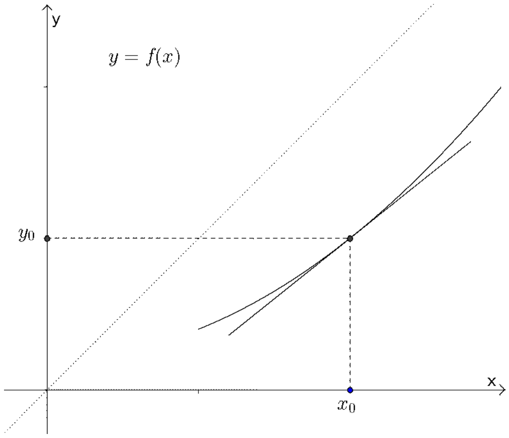
Consideremos una función biyectiva $f : A \to B$ con regla de asignación $y = f(x)$.
Si f es continua en x_0 entonces la función inversa $f^{-1} : B \to A$ es continua en $y_0 = f(x_0)$.
En particular, si f es continua en todo su dominio A, entonces f^{-1} es continua en todo su dominio B.

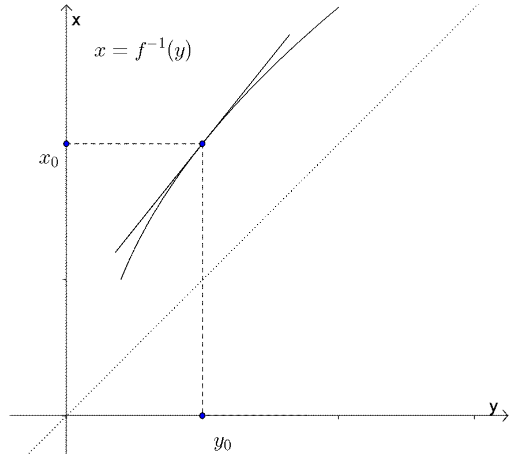
EJEMPLO 6.3.1.1. Según esta propiedad, la función arco seno es continua en el intervalo $[-1, 1]$. Lo pueden comprobar en las gráficas de la sección anterior, donde trabajamos la rama principal.

Intenten visualizar la continuidad de otras ramas de la función arco seno.

6.3.2 Derivabilidad de la función inversa

Supongamos ahora que la función $y = f(x)$ dibujada más arriba es derivable en el punto x_0 de su dominio. Gráficamente, esto significa que existe la recta tangente en el punto (x_0, y_0), y que su pendiente es $m = f'(x_0)$. La gráfica de la función inversa, obtenida por reflexión, "hereda" una recta tangente en el punto reflejado (y_0, x_0)





La recta tangente de la función inversa f^{-1} es simplemente la reflexión de la recta tangente de f. Si $f'(x_0) = 0$, la recta tangente a f es horizontal y su reflejada es vertical, sin pendiente definida. Pero si $f'(x_0) \neq 0$, la recta reflejada no es vertical y tiene pendiente bien definida. Esto nos hace ver, gráficamente, que existe la derivada de f^{-1} en el punto y_0.

La existencia de la derivada de la función inversa que ilustramos gráficamente se puede probar por cálculo directo: por definición, debemos estudiar el límite del cociente incremental

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

Conviene hacerlo mediante una sustitución $y = f(u)$. Dado que $f(u)$ es derivable en $u = x_0$, también es continua: para representar el límite $y \to y_0$ deberemos tomar $u \to x_0$. Una manipulación algebraica previa nos permite escribir

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(f(u)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(u) - f(x_0)} = \frac{u - x_0}{f(u) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(u)-f(x_0)}{u-x_0}}$$

(donde ningún denominador se anula mientras $y \neq y_0$, porque f es biyectiva y f^{-1} es continua en y_0). Si $f'(x_0) \neq 0$, existe el límite del cociente incremental y vale

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{u \to x_0} \frac{1}{\frac{f(u)-f(x_0)}{u-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Hemos encontrado que, si existe la derivada $f'(x_0)$ y es distinta de cero, entonces existe la derivada $f^{-1}(y_0)$ y vale $1/f'(x_0)$. Lo enunciamos formalmente:

Consideremos una función biyectiva $f : A \to B$ con regla de asignación $y = f(x)$.
Para cada punto x_0 donde f es derivable y $f'(x_0) \neq 0$, la función inversa $f^{-1} : B \to A$ es derivable en $y_0 = f(x_0)$, con

$$f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Ejemplo 6.3.2.1. Sigamos el ejemplo 6.1.2.1 de la sección anterior, donde construimos la función biyectiva

$$\begin{array}{rcl} f : [0, +\infty) & \to & [0, +\infty) \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & y = x^2 \end{array}$$

y su inversa

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}: [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ \text{que a } y \text{ le asigna} & & x = \sqrt{y} \end{array}$$

Consideremos $x_0 = 2$ y el correspondiente $y_0 = f(x_0) = 4$. Aunque no conociéramos la forma explícita de f^{-1}, podríamos afirmar que:

- $f^{-1}(y)$ es continua en $y_0 = 4$, porque $f(x)$ es continua en $x_0 = 2$.
- $f^{-1}(y)$ es derivable en $y_0 = 4$, porque $f(x)$ es derivable en $x_0 = 2$ (con función derivada $f'(x) = 2x$) y $f'(2) = 4 \neq 0$. La derivada de f^{-1} en $y_0 = 4$ se calcula como
$$\left(f^{-1}\right)'(4) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{4}$$

Podemos trabajar en un punto x_0 genérico:

- Como $f(x)$ es continua en todo su dominio $[0,+\infty)$, $f^{-1}(y)$ es continua en todo su dominio $[0,+\infty)$
- Como $f(x)$ es derivable en todo su dominio $[0,+\infty)$, y $f'(x)$ no se anula en $(0,+\infty)$, podemos garantizar que la función inversa $f^{-1}(y)$ es derivable en cualquier $y_0 \in (0,+\infty)$, y que la derivada se calcula como
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{2x_0}$$
donde $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Esta fórmula mezcla las variables, y sería deseable llegar a una expresión para $f^{-1}(y_0)$ en términos de y_0; en este caso lo podemos hacer explícitamente, escribiendo $x_0 = \sqrt{y_0}$:
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}$$

En este ejemplo contamos con la fórmula explícita de la función inversa, $x = \sqrt{y}$, y podemos corroborar estos resultados. Vemos que $x(y) = \sqrt{y}$ es continua en $[0,+\infty)$, derivable en $(0,+\infty)$ y no es derivable en $y = 0$. Por supuesto, la derivada $x'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ coincide con las reglas conocidas para derivar la raíz cuadrada.

Noten que en otros casos, cuando no contemos con la fórmula explícita de la función inversa, igualmente podremos calcular su derivada.

Actividades

Actividad 6.3.2.1. Para fijar conceptos, consideren una función $y = f(x)$ biyectiva en cierto dominio y codominio, y un punto x_0 del dominio donde existe $f'(x_0) \neq 0$. Discutan si está bien justificado el siguiente argumento:

> Como $f^{-1}(f(x)) = x$, podemos derivar ambos lados de la igualdad y obtener
> $$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1,$$
> luego
> $$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Actividad 6.3.2.2. Consideren la función $y(x) = 3x - x^3$.

- Determinen las restricciones adecuadas para trabajar con una rama de función inversa $x(y)$ tal que $x(-2) = 2$. ¿Cuáles son el dominio y codominio de esta función inversa?
- Calculen, si existe, la derivada $x'(-2)$.
- ¿Cuál es el dominio de la función derivada $x'(y)$? ¿Pueden dar la expresión de $x'(y)$?

- Grafiquen $y(x)$, con las restricciones elegidas, y $x(y)$. Interpreten el valor de las derivadas $y'(2)$ y $x'(-2)$ con las respectivas rectas tangentes.

Repitan el trabajo con otra rama de función inversa, que pase por $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

ACTIVIDAD 6.3.2.3. Verifiquen, aplicando la definición, que la función $x = \ln y$ es la inversa de $y = e^x$. ¿Existe otra rama de función inversa?

Asumiendo conocida la derivada de la función exponencial, calculen la derivada del logaritmo natural como derivada de la función inversa.

Cambiando los roles de las variables, verifiquen aplicando la definición que la función $x = e^y$ es la inversa de $y = \ln x$.

Asumiendo conocida la derivada del logaritmo natural, calculen la derivada de la función exponencial como derivada de la función inversa.

6.3.3 Aplicación: derivadas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas

Con las propiedades enunciadas, podemos calcular el dominio de derivabilidad y las funciones derivadas del arco seno, arco coseno y arco tangente.

Derivada del arco seno

Consideremos la función

$$\begin{array}{rcl} \text{sen} : [-\pi/2, \pi/2] & \to & [-1, 1] \\ \text{que a } \alpha \text{ le asigna} & & x = \text{sen } \alpha \end{array}$$

y su inversa

$$\begin{array}{rcl} \text{arcsen} : [-1, 1] & \to & [-\pi/2, \pi/2] \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & \alpha = \text{arcsen}\,(x) \;\; \text{tal que } \; \text{sen}\alpha = x. \end{array}$$

Dado que $\text{sen}'(\alpha) = \cos(\alpha) \neq 0$ en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, la función arcsen$x$ es derivable en el abierto $(-1, 1)$. Su derivada vale

$$\text{arcsen}'(x) = \frac{1}{\text{sen}'(\alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Para expresar el resultado en términos de x es conveniente usar la identidad trigonométrica

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

y despejar $\cos \alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}$ con signo $+$, porque α está restringido al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ donde el coseno es positivo. Además, hemos llamado sen$\alpha = x$. Reemplazando,

$$\boxed{\text{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{en } (-1, 1)}$$

Noten que no contamos con una expresión explícita para calcular $\alpha = \text{arcsen}\,(x)$ pero sí **contamos con una expresión explícita para su derivada**. Más aún, la derivada de la función trigonométrica inversa arcsen es una función **algebraica**.

Derivada del arco coseno

Consideremos ahora la función

$$\begin{array}{rcl} \cos: [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ \text{que a } \alpha \text{ le asigna} & & x = \cos\alpha \end{array}$$

y su inversa

$$\begin{array}{rcl} \text{arccos}: [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & \alpha = \text{arccos}\,(x) \quad \text{tal que} \quad \cos\alpha = x. \end{array}$$

Dado que $\cos'(\alpha) = -\text{sen}\alpha \neq 0$ en el intervalo abierto $(0,\pi)$, la función arccos$x$ es derivable en el abierto $(-1,1)$ y su derivada se calcula como

$$\text{arccos}'(x) = \frac{1}{\cos'(\alpha)} = -\frac{1}{\text{sen}\alpha}$$

Podemos, igual que en el caso del arco seno, expresar el resultado en términos de x: escribimos sen$\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ con signo $+$, porque α está restringido al intervalo $(0,\pi)$ donde el seno es positivo. Y usamos que $\cos\alpha = x$. Reemplazando,

$$\boxed{\text{arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{en } (-1,1)}$$

Es interesante comparar las gráficas de arcsen (x) y arccos (x) para comparar sus pendiente y entender por qué la derivada de una es igual a la derivada de la otra cambiada de signo. Pueden hacerlo con GeoGebra.

Derivada del arco tangente

Veamos la función

$$\begin{array}{rcl} \tan: (-\pi/2,\pi/2) & \to & \mathbb{R} \\ \text{que a } \alpha \text{ le asigna} & & x = \tan\alpha \end{array}$$

y su inversa

$$\begin{array}{rcl} \text{arctan}: \mathbb{R} & \to & (-\pi/2,\pi/2) \\ \text{que a } x \text{ le asigna} & & \alpha = \text{arctan}\,(x) \quad \text{tal que} \quad \tan\alpha = x. \end{array}$$

Dado que $\tan'(\alpha) = 1/\cos^2\alpha \neq 0$ en todo el dominio $(-\pi/2,\pi/2)$. la función arctan (x) es derivable en todo su dominio $\mathbb{R}$ y su derivada vale

$$\text{arctan}'(x) = \frac{1}{\tan'(\alpha)} = \cos^2\alpha$$

Para expresar el resultado en términos de x es necesario reescribir $\cos^2\alpha$. Las identidades trigonométricas apropiadas son

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\alpha \cdot \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \cos^2\alpha + \cos^2\alpha\tan^2\alpha = \cos^2\alpha\left(1+\tan^2\alpha\right)$$

de donde se despeja $\cos^2\alpha = 1/\left(1+\tan^2\alpha\right)$. Reemplazando $x = \tan\alpha$, se obtiene una expresión sencilla para la derivada del arco tangente, válida en todo x real:

$$\boxed{\text{arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{en } \mathbb{R}}$$

Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

En forma similar al caso de las inversas trigonométricas, se pueden obtener expresiones de las funciones hiperbólicas inversas, en términos de sus variables. Las identidades hiperbólicas necesarias son

$$\cosh^2\alpha - \mathsf{senh}^2\alpha = 1 \quad \text{y} \quad \tanh\alpha = \frac{\mathsf{senh}\alpha}{\cosh\alpha}$$

Dejamos como ejercicio que las construyan y recuerden los siguientes resultados:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathsf{argsenh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{en } \mathbb{R} \\ \mathsf{argcosh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{en } (1,+\infty) \\ \mathsf{argtanh}'(x) &= \frac{1}{1-x^2} \quad \text{en } (-1,1) \end{aligned}}$$

Para incorporar a la tabla de derivadas

Seguramente ya recuerdan de memoria la tabla de derivadas de funciones básicas. Agreguen ahora las derivadas que presentamos en esta sección a la tabla de derivadas conocidas. Si bien no las llamamos funciones básicas, son resultados nuevos y vale la pena memorizarlos.

Actividades

Actividad 6.3.3.1. Calculen las derivadas de argsenh(x) y argcosh(x).

Actividad 6.3.3.2. Escriban la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \mathsf{arcsen}(x)$ en el punto $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

CAPÍTULO 7
Integrales

Contenidos del capítulo: procesos de acumulación. Integral de Riemann (o integral definida). Teorema del Valor Medio. Teorema Fundamental del Cálculo. Integral indefinida o primitiva de una función. Regla de Barrow.

Segunda parte del curso de Análisis Matemático

Se suele llamar **Cálculo Infinitesimal** a buena parte de los conceptos y herramientas que hemos visto en la primera parte del curso de Análisis Matemático de funciones de una variable real. Una breve mirada hacia atrás permite apreciar que nos hemos enfocado en **cuestiones locales**: los conceptos de límite para $x \to x_0$ finito, continuidad en un punto, derivada en un punto, crecimiento en un punto, concavidad y extremos locales se basan en incrementos infinitesimales de la variable independiente alrededor del punto de estudio.

Con este Capítulo 7 comenzamos la segunda parte del curso, conocida como **Cálculo Integral.** Plantearemos otro tipo de problemas frecuentes en las Ciencias Exactas y Naturales, con preguntas nuevas acerca de **cuestiones globales**. Por ejemplo, cuánto cambia una cantidad de interés a lo largo de un intervalo de la variable independiente. Mientras construimos las respuestas a estas preguntas iremos generando el concepto de **integral** en sus distintas versiones (definida, indefinida, impropia) y las herramientas para calcularlas en forma práctica y eficiente.

En cada capítulo nuevo verán que necesitamos apoyarnos en los conceptos y herramientas de la primera parte del curso. Esperamos que ya las manejen con cierta facilidad; pero si lo encuentran necesario, acompañen esta segunda parte con un repaso de la primera.

7.1 Integral de Riemann

Contenidos de esta sección: cálculo de cantidades acumuladas. Integral de Riemann (o integral definida). Interpretación geométrica de la integral definida.

7.1.1 Cantidades acumuladas

En muchas situaciones necesitamos calcular el resultado de sumar distintos aportes a una cantidad total. Cuando los aportes son discretos (es decir que se pueden identificar uno por uno), la operación necesaria es simplemente una suma. Por ejemplo,

- para calcular los ingresos de un comercio a lo largo de un mes, habría que registrar los ingresos de cada día y sumarlos al cabo del mes completo.
- para calcular el consumo de combustible en un viaje, habría que registrar la cantidad cargada en cada parada y sumarlas al final del viaje.

Otros procesos de acumulación se desarrollan en forma continua. Por ejemplo,

- una reacción química que convierte una sustancia inicial en cierto producto final se desarrolla a lo largo del tiempo. Aunque las moléculas se pueden identificar de a una, hay tantas en un mol que no se pueden contar las reacciones individualmente. Además, en cada intervalo de tiempo tan pequeño como podamos medir, habrán reaccionado muchísimas moléculas.
  Conviene trabajar con una **velocidad de reacción** que describe la cantidad de moles de la sustancia inicial que reaccionan por segundo. Luego, en cada intervalo de tiempo pequeño (coloquialmente se suele decir en cada instante) se puede representar la cantidad de moles convertidos multiplicando la velocidad de reacción por el tiempo considerado.
  Finalmente, para saber cuántos moles se han producido a lo largo de una hora, habría que **sumar** lo que se produce en cada instante de esa hora.
- la **tasa de nacimientos** de una población de bacterias registra la cantidad de nacimientos por unidad de tiempo, mientras la **tasa de defunción** registra las muertes por unidad de tiempo. En general estas tasas no son constantes, sino que varían de acuerdo a las fuentes de alimentación, presencia de depredadores, etc.
  Para conocer el cambio de la población en cierto período, hay que calcular primero la cantidad de nacimientos y defunciones en cada instante multiplicando las respectivas tasas por el tiempo considerado, y hacer la diferencia.
  Finalmente, hay que **sumar** los cambios producidos en cada instante.
- la **velocidad de un movimiento** registra los kilómetros recorridos por hora, en forma instantánea; para saber la distancia recorrida en cierto intervalo de tiempo, hay que acumular los kilómetros recorridos. Para ser precisos, cuando la velocidad varía en tiempo, habría que **acumular** en detalle la distancia recorrida en cada instante.

Estos procesos, que podemos llamar procesos de acumulación continua, están caracterizados por una variable que recorre cierto intervalo del eje real (en estos ejemplos la variable natural es el tiempo t). Para cada incremento infinitesimal de esa variable podemos expresar una contribución infinitesimal a la cantidad acumulada que se quiere calcular, mediante el producto de cierta función por el incremento de la variable. El **Cálculo Integral**, que constituye la segunda parte de nuestro curso, **tiene como objetivo estudiar el modo en que se suman o acumulan estas contribuciones infinitesimales**.

El cálculo de cantidades acumuladas en un proceso continuo sería sencillo si la tasa de acumulación se mantuviera constante durante el proceso. En esos casos la cantidad acumulada es proporcional al intervalo recorrido por la variable, y el cálculo se reduce a usar una regla de tres simple. En cambio, cuando la tasa de acumulación va variando a lo largo del proceso, necesitamos una herramienta más elaborada para calcular la cantidad acumulada. Lo que debemos hacer, básicamente, es sumar "una cantidad muy grande de contribuciones muy pequeñas". En el límite en que se suma "una cantidad infinita de contribuciones infinitesimales", este proceso de suma se llama **integración**.

Veamos primero un ejemplo en detalle, y luego formalizaremos estos conceptos.

7.1.2 Un ejemplo de acumulación

Un ejemplo similar a los mencionados, que tiene todos los ingredientes necesarios para plantear después la teoría general de integración de Riemann, es el siguiente:

EJEMPLO 7.1.2.1. Se llena un tanque subterráneo de combustible mediante un proceso de bombeo. Se controla fácilmente la cantidad de litros bombeados por segundo, con un caudalímetro, mientras que no es fácil medir el volumen acumulado en el tanque subterráneo. Por eso es importante calcular el volumen bombeado, sumando los litros que se vierten por unidad de tiempo.

Este ejemplo se enmarca en el estudio más general de transporte de materia. En el caso de transporte de fluidos (líquidos o gases) se llama **caudal** al volumen de fluido transferido por unidad de tiempo, y es usual anotarlo con la letra Q.

- Consideremos primero el llenado del tanque en un régimen de caudal Q constante, $Q = 5\,l/s$ (medimos el volumen en litros y el tiempo en segundos). ¿Cuál es el volumen V que se vierte al tanque en un minuto?

Dado que el caudal es constante, el volumen es proporcional al tiempo transcurrido: en un segundo 5 litros, en dos segundos 10 litros, etc. Al cabo de un minuto ($\Delta t = 60\,s$),

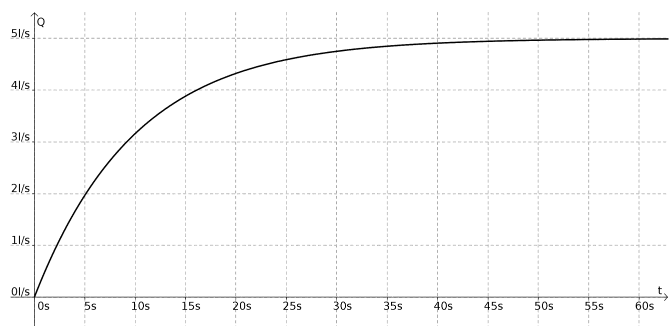
$$V = Q \cdot \Delta t = 5 \cdot 60 = 300\,l$$

(por simplicidad de lectura evitamos escribir las unidades durante los cálculos, pueden completar ustedes $5\frac{l}{s} \cdot 60s$ y simplificar los segundos para obtener litros).

- Consideremos ahora un caso más realista: el rendimiento de la bomba depende del tiempo, desde que se arranca hasta que logra la temperatura de funcionamiento. Según el manual del fabricante, el caudal real se describe (en litros por segundo) mediante la expresión

  $$Q(t) = 5(1 - e^{-t/10})$$

  que se muestra en la siguiente gráfica



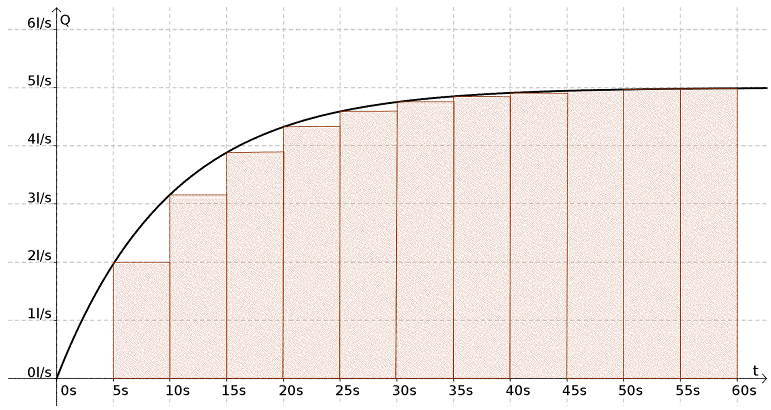
¿Cuál es el volumen V que se vierte al tanque en el primer minuto de funcionamiento?

Una estrategia adecuada para encarar este problema es **partir** el primer en minuto varios intervalos de tiempo pequeños, y estimar el volumen vertido cada intervalo **como si el caudal se mantuviera constante,** con un valor de Q representativo de ese intervalo.

Por ejemplo, podemos tomar 12 intervalos de $\Delta t = 5\,s$ y usar el valor de $Q(t)$ al principio de cada intervalo. En cada intervalo multiplicamos caudal por tiempo, y sumamos:

$$V = Q(0) \cdot 5 + Q(5) \cdot 5 + Q(10) \cdot 5 + \cdots + Q(55) \cdot 5$$

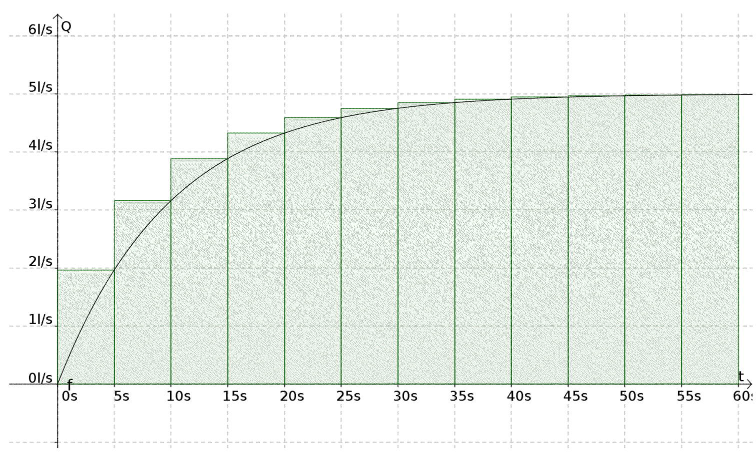
Gráficamente, lo que hacemos es calcular el área de varios rectángulos multiplicando la altura (es decir, un valor de caudal) por la base (es decir, un intervalo de tiempo) de cada uno, y sumar las áreas obtenidas:



El resultado, $236.62\,l$, nos da una primer aproximación al volumen vertido en un minuto.

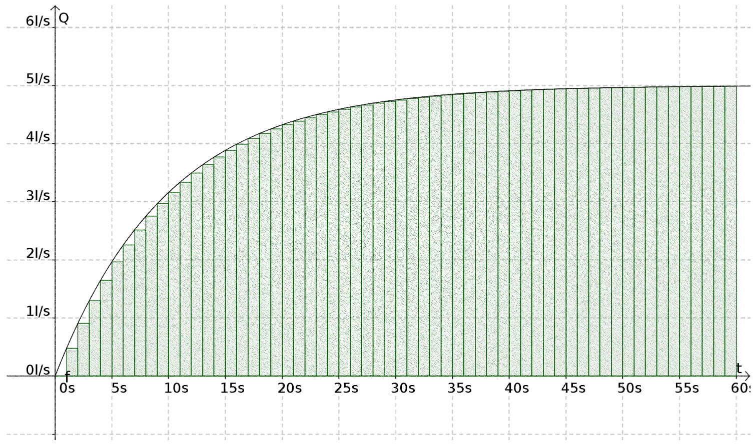
Podemos diseñar varias maneras de mejorar esta aproximación:

- Observamos en el gráfico anterior que logramos un volumen menor que el verdadero, porque usamos el caudal mínimo de cada intervalo (al principio del intervalo, siendo $Q(t)$ creciente). Si usáramos el caudal al final de cada intervalo obtendríamos $261.56\,l$, un resultado mayor que el real:



Si usáramos el caudal en el punto medio de cada intervalo, probablemente tendríamos una mejor aproximación.

- Los intervalos no necesitan ser todos de igual longitud. En el gráfico vemos que hay un error importante en los primeros intervalos, porque el caudal cambia rápidamente (la derivada $Q'(t)$ es grande). Parece conveniente tomar intervalos cortos en el primer tramo, para mejorar la precisión, e intervalos más largos luego, para ahorrar trabajo. Por ejemplo, 4 intervalos en los primeros $10\,s$, 3 intervalos entre $10\,s$ y $20\,s$, 2 intervalos entre $20\,s$ y $40\,s$ y 1 intervalo entre $40\,s$ y $60\,s$; con un total de 10 intervalos, y con el mismo esfuerzo de cálculo que en las gráficas anteriores, quedaría mejor cubierta el área bajo la curva.
- Podemos mejorar la aproximación tomando intervalos de tiempo más cortos. Por ejemplo, si tomamos intervalos de $1\,s$ tendremos que trabajar más (son 60 intervalos) pero el resultado de $248.61\,l$ será una aproximación mucho mejor. Gráficamente, se observa que cubriremos mejor el área bajo la curva.



- Siguiendo este refinamiento del cálculo, la manera de calcular el volumen vertido **con precisión** es aumentar indefinidamente el número de intervalos, que serán cada vez más pequeños. Es decir, diseñar un cálculo con N intervalos, sumar las contribuciones en forma general (para cualquier N) y finalmente tomar el límite en que los términos de la suma sean infinitesimales . El resultado preciso, calculado de este modo, revelaría que en el primer minuto se vierten $250.12398\ldots$ litros de combustible.[1]

Actividades

Actividad 7.1.2.1. Para fijar conceptos, elaboren la siguiente consigna:

- Propongan un problema, distinto al del texto, donde sea necesario plantear una suma de contribuciones infinitesimales.

7.1.3 La integral de Riemann, o integral definida

En esta sección formalizaremos el mecanismo de partir y sumar, que discutimos en el ejemplo, para aplicarlo en general a una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$. Este mecanismo constituye la **teoría de integración de Riemann**.

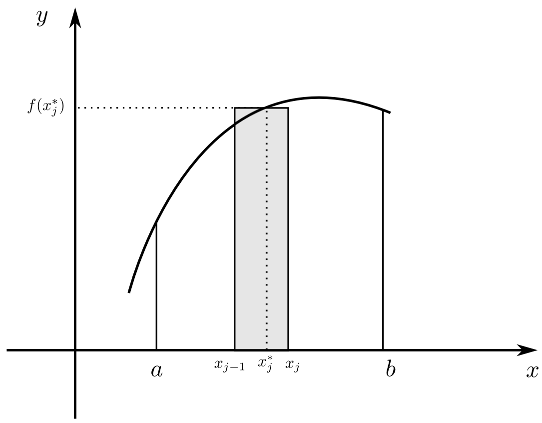
Consideremos una función $y = f(x)$, con un intervalo cerrado $[a, b]$ incluido en su dominio. El mecanismo de Riemann para sumar contribuciones infinitesimales consta de los siguientes pasos:

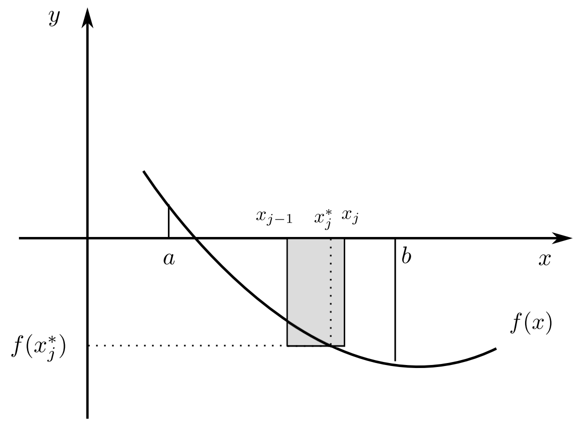
En primer lugar vamos a considerar una partición del intervalo $[a, b]$, en N sub-intervalos consecutivos. Para eso introducimos valores intermedios de x que llamaremos x_j, ordenados de izquierda a derecha:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$$

Quedan determinados N sub-intervalos: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... , $[x_{N-1}, x_N]$. La longitud de cada sub-intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ es el incremento $\Delta x_j = x_j - x_{j-1} > 0$ de la variable x: $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, ... , $\Delta x_N = x_N - x_{N-1}$. Además, en cada sub-intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ elegimos algún punto de muestra x_j^*. Podemos llamar Δ^* a esta partición del intervalo original y a esta selección de puntos de muestra en cada su–intervalo.

En segundo lugar, multiplicamos el valor de la función $f(x_j^*)$ por la longitud Δx_j del sub-intervalo, para obtener un término $f(x_j^*)\Delta x_j$ de la suma que buscamos. Gráficamente, si $f(x_j^*)$ es positivo, esta contribución $f(x_j^*)\Delta x_j$ representa al área del rectángulo de base Δx_j y altura $f(x_j^*)$; en cambio, si $f(x_j^*)$ es negativo, la contribución $f(x_j^*)\Delta x_j$ es negativa y equivale a menos el área del rectángulo de base Δx_j que queda dibujado por debajo del eje de abscisas:



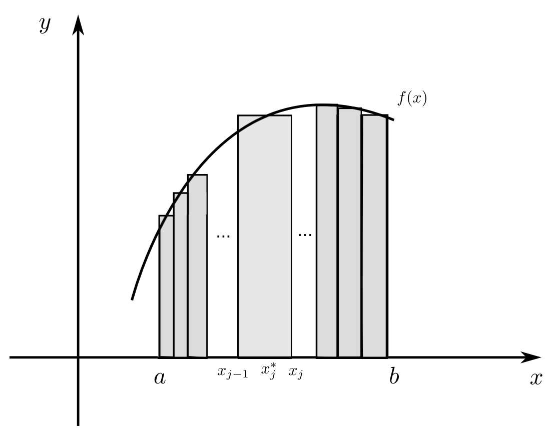


También puede suceder que $f(x_j^*) = 0$, y la contribución $f(x_j^*)\Delta x_j$ se anule. A partir de esta interpretación geométrica, la noción de integración de Riemann queda asociada a la noción de **área orientada contenida entre la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas.**

En tercer lugar, se acumulan las contribuciones de todos los rectángulos, cada cual con su signo. Para eso construimos una suma sobre todos los sub-intervalos

$$f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \cdots + f(x_N^*)\Delta x_N = \sum_{j=1}^{N} f(x_j^*)\Delta x_j = S_{\Delta^*}$$

El símbolo $\sum$ en la expresión intermedia se llama sumatoria, y sirve para representar en forma compacta los N términos de la suma; se lee "suma desde $j = 1$ hasta $j = N$ de términos de la forma $f(x_j^*)\Delta x_j$". Y llamamos S_{Δ^*} al resultado para recordar que es una suma asociada a la partición Δ^* y sus puntos x_j^*. Gráficamente,



Esta suma, llamada **suma de Riemann**, depende de la partición Δ^* utilizada (tanto de la elección de intervalos $[x_{j-1}, x_j]$ como de los puntos).

> En la suma de Riemann puede haber términos positivos, términos nulos y términos negativos. Gráficamente se puede interpretar cada contribución $f(x_j^*)\Delta x_j$ como un **área orientada**: área positiva por encima del eje x y área negativa por debajo del eje x. La suma completa $\sum_{j=1}^{N} f(x_j^*)\Delta x_j$ es, en general, una suma algebraica (de términos positivos y negativos). El resultado final puede ser tanto positivo como negativo, o nulo.

Finalmente, para refinar esta suma de modo tal que sea una mejor aproximación a la cantidad acumulada que se busca calcular, corresponde considerar otras particiones en las cuales aumente el número N de sub-intervalos. Si se toman sub-intervalos iguales, su longitud será $(b - a)/N$; en ese caso, al aumentar el número

N disminuye la longitud de cada uno . Pero los sub-intervalos también podrían ser de distinta longitud, y en ese caso debemos asegurar que el tamaño de todos ellos sea pequeño.

Se llama **norma de la partición** a la longitud del mayor sub-intervalo presente en la partición; en símbolos, es usual usar dobles barras $\| \ \|$ para anotar una norma[2]:

$$\|\Delta^*\| = \max\left(x_j - x_{j-1}\right)$$

donde max se refiere al máximo de las longitudes $x_j - x_{j-1}$ dentro del conjunto de todos los sub-intervalos de la partición del intervalo $[a, b]$. Con esta convención, si se disminuye la norma $||\Delta^*||$ de la partición entonces la longitud de **todos** los sub-intervalos se mantiene controlada: para todo j, $\Delta x_j \leq \|\Delta^*\|$. Naturalmente, la cantidad N de sub-intervalos es cada vez mayor cuando se disminuye la norma de la partición.

Para refinar arbitrariamente la precisión de las sumas de Riemann se toma un **límite** para $\|\Delta^*\| \to 0$; observen que en ese límite $N \to +\infty$ y que para cualquier sub-intervalo j tenemos que su longitud $\Delta x_j \to 0$. Si la función $f(x)$ es acotada (es decir, su valor absoluto no toma valores por encima de cierta cota superior) cada término de la suma de Riemann, $f(x_j^*)\Delta x_j$ **se hace arbitrariamente pequeño** en este proceso, es decir que cada $f(x_j^*)\Delta x_j$ aporta una **contribución infinitesimal** a la suma que estamos calculando. El proceso de refinamiento se hace con la esperanza de que las sumas de Riemann, calculadas para particiones de norma $\|\Delta^*\|$ cada vez más pequeña, tiendan a estabilizarse en algún resultado. En ese caso, diremos que existe el límite de las sumas de Riemann, para $\|\Delta^*\| \to 0$.

Se puede demostrar que en muchos casos el valor de las sumas de Riemann realmente se estabiliza cuando $\|\Delta *\| \to 0$, y que además el valor límite es independiente de las particiones elegidas y de la elección de puntos x_j^* en cada sub-intervalo. En esos casos, se define:

Integral de Riemann, o integral definida:

Consideren una función $y = f(x)$ y un intervalo $[a, b]$ en el dominio de f.
Si el límite sobre particiones (descripto antes)

$$\lim_{\|\Delta^*\| \to 0} \sum_{j=1}^{N} f(x_j^*)\Delta x_j$$

existe y es independiente de las particiones elegidas y de la elección de los puntos x_j^* en cada sub-intervalo, se dice que la función $f(x)$ es **integrable Riemann** *(o más brevemente,* **integrable***) en el intervalo $[a, b]$.*
El resultado del límite se anota

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

*que se lee "***integral de Riemann** *de $f(x)$ por diferencial de x entre a y b" o "***integral definida** *de $f(x)$ por diferencial de x entre a y b".*

Conviene hacer algunos comentarios sobre la notación empleada:

- El **símbolo integral** $\int$ es similar a una letra S, y representa el "recuerdo" de la sumatoria Σ después de tomar el límite. La integral definida es el resultado de una suma, seguida de un proceso de límite.
- Los extremos del intervalo $[a, b]$ se llaman **límites de integración**; aquí la palabra límite se refiere a borde, o frontera. La forma de anotarlos debajo y encima del símbolo $\int$ es similar a la notación de la sumatoria. Así como una sumatoria comienza en $j = 1$ y termina en $j = N$, el intervalo de integración comienza en $x = a$ y termina en $x = b$.
- A la función $f(x)$ se la llama **integrando**, y a la variable x se la llama **variable de integración**.
- El producto $f(x)\, dx$ representa el "recuerdo" de los términos $f(x_j^*)\Delta x_j$ de las sumas de Riemann, luego del proceso de límite $||\Delta^*|| \to 0$ en el cual todos los sub-intervalos Δx_j son infinitesimales (es decir,

[2]Medida o tamaño de un objeto matemático.

tienden a cero). Para funciones $f(x)$ con valores finitos, los términos $f(x_j^*)\Delta x_j$ resultan arbitrariamente pequeños cuando $||\Delta^*|| \to 0$; en ese sentido, se dice que

$$f(x)\,dx$$

es una **contribución infinitesimal** a la integral de Riemann.

Como la integral definida es el límite de una sucesión de sumas de Riemann, en el que cada término de las sumas se vuelve arbitrariamente pequeño, se puede decir coloquialmente que la integral es una "suma infinita de contribuciones infinitesimales". Cuando necesiten plantear una integral para resolver un problema, muchas veces van a construir primero las "contribuciones infinitesimales" y luego "sumarlas"; dicho sin comillas, primero van a reconocer la función a integrar, y luego van a calcular la integral.

Actividades

ACTIVIDAD 7.1.3.1. Para fijar conceptos, elaboren una respuesta coloquial para la siguiente pregunta:

- ¿Cómo se construye una integral de Riemann?

ACTIVIDAD 7.1.3.2. Un insecto de la especie Blatta Orientalis recorre una cierta distancia con velocidad variable. Recuerden que si describimos la posición del insecto con una coordenada x que depende del tiempo t, entonces su velocidad significa $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$.

1. Si $v(t)$ fuera constante y valiera $v_0 = 5\frac{cm}{s}$, ¿qué distancia recorre la Blatta en 2 segundos?
2. Si la velocidad es realmente variable y se puede describir con la función$v(t) = 4\frac{cm}{s^2}\,t$,
   a) ¿Cómo se expresa la distancia recorrida en un intervalo infinitesimal de tiempo dt?
   b) ¿Cómo se expresa la distancia recorrida en los 2 segundos que van desde $t = 0$ hasta $t = 2\,s$?
   c) ¿Cómo se expresa la distancia recorrida en los 2 segundos que van desde $t = 2\,s$ hasta $t = 4\,s$?

7.1.4 Interpretación geométrica de la integral de Riemann

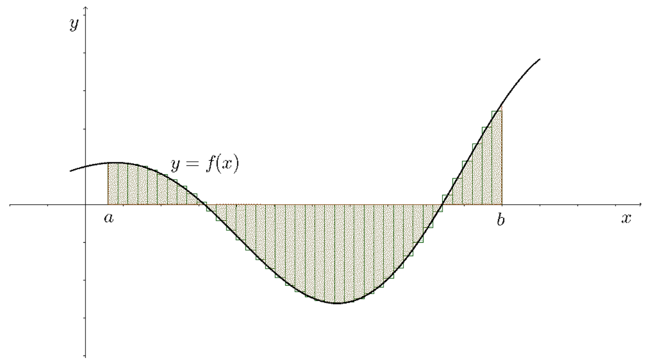
La integral de Riemann es la herramienta que nos provee el Análisis Matemático para calcular una cantidad acumulada en un proceso continuo. Cuando hablemos genéricamente de una función $y = f(x)$ y de una integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

también conviene interpretarla como un proceso continuo de acumulación: para eso graficamos la función $y = f(x)$ en el plano xy, y recorremos continuamente con la variable x el intervalo $[a, b]$, acumulando contribuciones infinitesimales de la forma $f(x)\,dx$. Cada contribución infinitesimal se interpreta como el área orientada de un rectángulo infinitesimal, de altura finita $f(x)$ y base infinitesimal dx; recuerden que decimos área orientada porque la contribución tiene signo positivo cuando $f(x)$ toma valores positivos, pero tiene signo negativo cuando $f(x)$ toma valores negativos.

De esta manera la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ representa la **acumulación algebraica de áreas infinitesimales** contenidas entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje x, al recorrer el intervalo $[a, b]$. El resultado geométrico se llama **área algebraica**[3], porque acumula contribuciones positivas cuando la gráfica queda por encima del eje, y negativas cuando la gráfica queda por debajo.

[3]En general, se llama suma algebraica a una suma de términos positivos y negativos.



En el caso en que la función $f(x)$ se mantenga positiva en **todo** el intervalo $[a,b]$, la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ describe el **área geométrica** (positiva) de la región encerrada entre la gráfica de $f(x)$ y el eje x, a lo largo del intervalo $[a,b]$.

Actividades

ACTIVIDAD 7.1.4.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes preguntas:

- ¿Qué entienden por área algebraica? ¿Y por área geométrica?
- ¿Cómo se relaciona la integral definida
$$\int_a^b f(x)\,dx$$
con la noción de área algebraica?
- Propongan ejemplos gráficos con funciones que tomen valores positivos y negativos.

ACTIVIDAD 7.1.4.2. Grafiquen e interpreten geométricamente las siguientes integrales. Usando fórmulas conocidas de superficies (rectángulos, triángulos, circunferencias), calculen sus valores:

- $\int_2^5 3\,dx$
- $\int_1^4 x\,dx$
- $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ (sugerencia: usen la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2=1$)
- $\int_0^2 (-2x)\,dx$

ACTIVIDAD 7.1.4.3. Retomen la actividad 7.1.3.2: grafiquen la función $v(t)$, usen la interpretación geométrica de la integral, y calculen las distancias expresadas en los incisos b) y c).

¿Recorre la Blatta durante los primeros dos segundos la misma distancia que en los dos segundos siguientes?

GEOGEBRA 7.1.4.4. Con GeoGebra pueden calcular integrales definidas. Una vez que tienen declarada una función $f(x)$, escriban el comando

```
Integral[f,a,b]
```

Revisen con esta herramienta los resultados que hayan obtenido en algunas de las actividades anteriores.

Observen en cada caso la región sombreada entre la gráfica de la función y el eje x, en la Vista Gráfica, y el valor calculado en la Vista Algebraica.

Pueden contar cuadrados en la Cuadrícula para estimar el valor del área sombreada y comparar con el valor de la integral. También pueden cambiar el tamaño de los cuadrados de la cuadrícula, para un conteo detallado de superficies; para eso, busquen en el menú contextual la herramienta Vista Gráfica y elijan la pestaña Cuadrícula.

7.2 Propiedades de la integral de Riemann

Contenidos de esta sección: existencia de la integral definida. Propiedades heredadas de la suma. Extensión de la definición de integral de Riemann. Valor medio de una función. Teorema del Valor Medio.

7.2.1 Existencia de la integral definida en intervalos cerrados

Hasta aquí discutimos el concepto de integral definida, o integral de Riemann, y el planteo del cálculo de cantidades acumuladas. Sin embargo, construir sumas de Riemann para un N arbitrario, y calcular el límite para $N \to +\infty$, aparece como una tarea muy difícil. Además, podría darse que el límite no exista (por ejemplo que sea infinito, o que sea oscilante). El Calculo Integral nos provee **condiciones de existencia** de la integral definida y también una **forma alternativa de calcular** su resultado. Pero antes de aprender a resolver integrales de forma práctica vamos a discutir su existencia y sus primeras propiedades.

En primer lugar vamos a enunciar condiciones sencillas para asegurar que una dada función es integrable en un intervalo:

Existencia de la integral definida de funciones continuas

Si una función $f(x)$ es **continua en un intervalo cerrado** $[a, b]$*, entonces $f(x)$ es* **integrable** *en* $[a, b]$*. Es decir, existe la integral definida*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Este resultado es gráficamente intuitivo y no lo vamos a demostrar en este curso. Solo haremos algunos comentarios para argumentar intuitivamente su validez:

> Pensemos en funciones continuas en todo un intervalo cerrado. La misma noción de continuidad que nos permite trazar la gráfica sin levantar el lápiz nos hace intuir que el área bajo la curva tiene un valor bien definido, y que la aproximación del área mediante rectángulos arbitrariamente delgados será exacta cuando $\|\Delta^*\| \to 0$.

También se puede enunciar la existencia de la integral en el caso de funciones con un número finito de discontinuidades evitables o del tipo salto en el intervalo de integración:

Existencia de la integral definida de funciones con discontinuidades tipo salto

Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, excepto por un número finito de discontinuidades evitables o del tipo salto, entonces $f(x)$ es integrable Riemann en $[a, b]$. Es decir, existe la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Un argumento gráfico para justificar este resultado es el siguiente:

> Si la función tiene un número finito de discontinuidades tipo salto significa que en esas discontinuidades existen los límites laterales y son finitos, no hay asíntotas verticales. Intuitivamente, al trazar la gráfica movemos el lápiz "verticalmente" en cada discontinuidad. Al armar las sumas de Riemann podemos usar esos puntos para agrupar y separar la suma de rectángulos a cada lado de los saltos. Entre un salto y el siguiente el cálculo no presenta obstáculos cuando $\|\Delta\| \to 0$, dado que se trata de un tramo de función continua, y la integral parcial existe. Finalmente,

podremos sumar sin dificultad los resultados parciales porque se trata de una cantidad finita de términos.

En la práctica, estos teoremas nos dicen que tiene sentido integrar cualquier función conocida en un intervalo cerrado, siempre que el intervalo de integración contenga a lo sumo un número finito de discontinuidades tipo salto. Si bien este teorema asegura la existencia de la integral definida, no dice cómo calcularla ni cuánto vale el resultado.

Actividades

ACTIVIDAD 7.2.1.1. Para fijar conceptos, elaboren la siguiente pregunta:

- ¿Se imaginan posibles ejemplos en que la integral de Riemann de una función no exista? Es decir, que el límite de las sumas de Riemann no dé un resultado finito.

7.2.2 Propiedades de la integral definida

Las propiedades más inmediatas de la integral definida surgen de su definición como límite de sumas de Riemann. Citemos las propiedades de linealidad:

Linealidad respecto del integrando

Si $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en $[a,b]$, y k es una constante, entonces

1. *$k\,f(x)$ es integrable en el intervalo $[a,b]$,*
$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$
2. *$f(x)+g(x)$ es integrable en el intervalo $[a,b]$,*
$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Las propiedades de linealidad reflejan que la integral definida se construye como límite de sumas: la primera habla de "sacar factor común" k y la segunda habla de "asociar" los términos con $f(x)$ por un lado y los términos con $g(x)$ por otro lado. Estas operaciones son naturalmente válidas al manipular sumas de Riemann, pero la demostración formal de las propiedades enunciadas requiere tratar con cuidado el límite para $\|\Delta^*\| \to 0$. No lo haremos en este curso.

Recordemos que la integral de Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$ se define en intervalos $[a,b]$, donde a es menor que b. Es conveniente para varias manipulaciones extender la definición al caso en que $b=a$ y también a casos en que b es menor que a:

Extensión de la definición de integral de Riemann

Se dan las siguientes definiciones para la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ cuando a no es menor que b:

- *si $a=b$, y existe $f(a)$, se define*
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$
- *si $b<a$, y existe $f(x)$ y es integrable en el intervalo $[b,a]$, se define*
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Estas definiciones tienen interpretación geométrica directa: la primera dice que si el intervalo de integración tiene ancho nulo, entonces el área encerrada es nula. La segunda dice que si se quieren sumar contribuciones recorriendo el eje x hacia la izquierda, desde a hasta b, cada incremento de x será negativo y representará el opuesto de la longitud de la base de los rectángulos de Riemann; por eso la integral "recorrida al revés" dará la cantidad opuesta a la integral calculada "al derecho", es decir yendo de izquierda (desde b) a derecha (hasta a).

EJEMPLO 7.2.2.1. Podemos ilustrar la definición calculando

$$\int_6^2 5\,dx = -\int_2^6 5\,dx = -20$$

ya que el rectángulo con base en el intervalo $[2,6]$ y altura 5 tiene área 20. Grafiquen e interpreten esta situación.

Relacionada con la propiedad asociativa de la suma, se cumple la propiedad de aditividad:

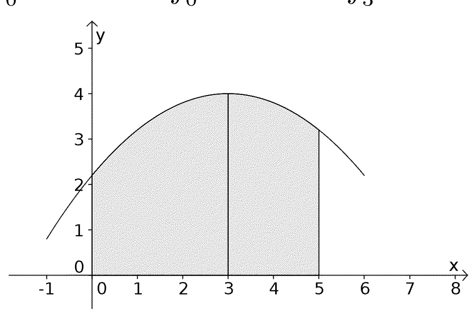
Aditividad respecto de intervalos

1. *Si $f(x)$ es integrable en el intervalo $[a,b]$ y c es un punto intermedio $a < c < b$, entonces*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
2. *Si a, c y b no están ordenados, y $f(x)$ es integrable en los tres intervalos determinados por a, b y c, entonces también vale*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

La primera parte refleja la propiedad asociativa en las sumas de Riemann: dado que $a < c < b$ se pueden hacer particiones del intervalo completo $[a,b]$ de forma tal que las primeros sub-intervalos cubran el intervalo $[a,c]$ y los restantes cubran el sub-intervalo $[c,b]$. Si se suman los primeros sub-intervalos por un lado, y los restantes por otro lado, se construyen por separado las integrales $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$. Luego, la suma de las dos partes separadas dará la integral completa.

EJEMPLO 7.2.2.2. En el siguiente gráfico, se ilustra que

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx$$

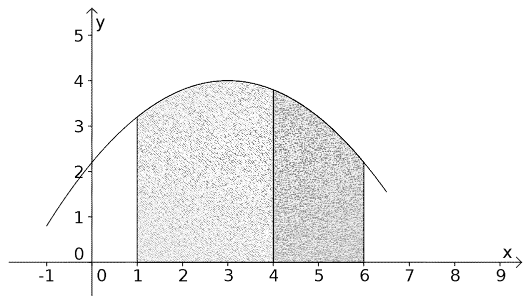


La parte (2) es una extensión del resultado, aprovechando que hemos definido la integral recorrida de derecha a izquierda ("recorrida al revés"): si alguno de los intervalos de integración se recorre al revés, la suma se convierte en resta.

EJEMPLO 7.2.2.3. Podemos ilustrar un caso con $a < b < c$, donde la integral entre c y b queda recorrida al revés:

$$\begin{aligned} \int_1^4 f(x)\,dx &= \int_1^6 f(x)\,dx + \int_6^4 f(x)\,dx \\ &= \int_1^6 f(x)\,dx - \int_4^6 f(x)\,dx \end{aligned}$$

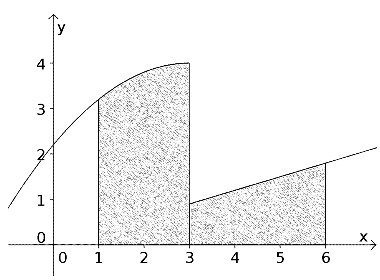
Gráficamente podemos interpretar el significado del resultado:



al integrar entre 1 y 6 estamos acumulando más área que la que corresponde a integrar entre 1 y 4. Al sumar $\int_6^4 f(x)\,dx$ efectivamente restamos el exceso.

Una aplicación práctica de la propiedad de aditividad sirve para integrar una función definida a trozos. Cuando hagamos los cálculos, convendrá separar la integral en intervalos donde la función a integrar sea continua.

EJEMPLO 7.2.2.4. En la siguiente gráfica, para calcular $\int_1^6 f(x)\,dx$ conviene integrar por separado, en $[1,3]$ y en $[3,6]$.



Las integrales

$$\int_1^3 f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_3^6 f(x)\,dx$$

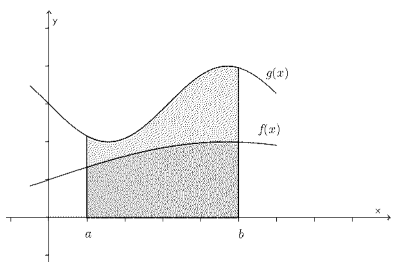
se calculan como si **el integrando fuera continuo, incluso en los bordes de cada intervalo**.

Otras propiedades que la integral definida hereda de las sumas de Riemann son las leyes de monotonía:

Leyes de monotonía (o conservación de desigualdades).

1. *Si* $f(x) \geq 0$ *es integrable en el intervalo* $[a, b]$, *entonces*
$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$
2. *Si* $f(x)$ *y* $g(x)$ *son integrables en el intervalo* $[a, b]$ *y* $g(x) \geq f(x)$ *en todo el intervalo, entonces*
$$\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$$

Estas propiedades reflejan, una vez más, que la integral definida se construye como límite de sumas: la primera dice que al "sumar" cantidades no negativas se obtiene un resultado no negativo, y la segunda dice que al "sumar" cantidades mayores que otras se obtiene un resultado mayor que otro. Es decir, las **leyes de monotonía de la suma** son válidas para integrales definidas. Lo ilustramos gráficamente en el caso de funciones positivas: en un mismo intervalo, una función positiva encierra un área positiva, y una de mayor altura encierra mayor área.



Una propiedad que usaremos con frecuencia se hereda de las propiedades de las sumatorias. Recuerden que en una sumatoria el índice de suma "es mudo", en el sentido de que lo importante no es qué variable se usa, sino qué rango recorre. Por ejemplo,
$$\sum_{j=1}^{N} f(x_j^*)\Delta x_j = \sum_{k=1}^{N} f(x_k^*)\Delta x_k$$
En el mismo sentido, podemos cambiar la variable de integración sin afectar el resultado de una integral: si en lugar de sumar contribuciones $f(x)\,dx$ con x en $[a, b]$ sumamos contribuciones $f(u)\,du$ con u en $[a, b]$ estaremos haciendo el mismo cálculo, y por supuesto obtendremos el mismo resultado. Podemos enunciar

La variable de integración "es muda". Dada una función f *integrable en un intervalo* $[a, b]$ *de su dominio, son equivalentes las expresiones*
$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_a^b f(u)\,du$$

Esta sencilla propiedad **nos permite cambiar a conveniencia la letra que usemos para la variable de integración**.

Actividades

ACTIVIDAD 7.2.2.1. Si les dicen que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en el intervalo $[0, 5]$, y que
$$\int_0^2 f(x)\,dx = -1, \quad \int_2^4 f(x)\,dx = 8, \quad \int_2^4 g(x)\,dx = 1/2$$

- Dibujen posibles gráficas esquemáticas de $f(x)$ y de $g(x)$, compatibles con la información dada.

- Calculen $\int_2^4 (2f(x) - 3g(x))\, dx$.
- Calculen $\int_0^4 f(u)\, du$ y $\int_4^2 f(t)\, dt$.
- Calculen $\int_1^1 g(x)\, dx$.

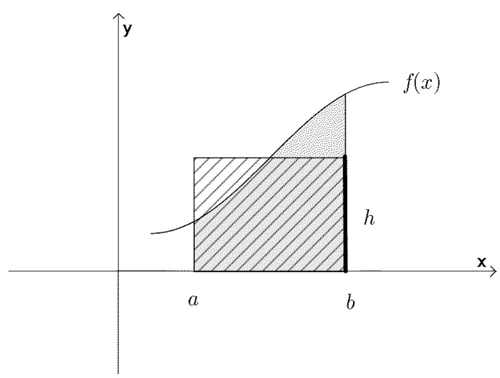
Actividad 7.2.2.2. Usando reglas de monotonía, discutan si la siguiente comparación es verdadera o falsa, y expliquen su respuesta:

$$\int_{-1}^{1} \left(1 + x^2\right) dx \geq 2$$

Recuerden revisar esta actividad cuando sepan calcular la integral del lado izquierdo.

7.2.3 Valor medio de una función continua y Teorema del Valor Medio para Integrales

Al integrar una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ estamos sumando contribuciones infinitesimales de la forma $f(x)\, dx$, que se pueden interpretar como áreas orientadas de rectángulos de base dx y altura $f(x)$. En términos geométricos cabe preguntarse cuál sería la altura h de un solo rectángulo con base en $[a, b]$ que tenga la misma área que la que acumula la integral $\int_a^b f(x)\, dx$. Gráficamente,



la igualdad de áreas plantea la ecuación

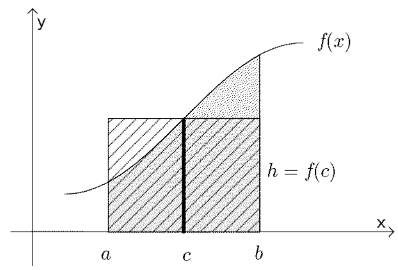
$$(b - a)\, h = \int_a^b f(x)\, dx$$

A la altura h que resuelve esta ecuación se la llama **valor medio** de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y se la anota $\langle f(x) \rangle$. Despejando h, se define:

> *Si la función $f(x)$ es integrable en el intervalo $[a, b]$, el* **valor medio** *de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es el resultado de calcular*
>
> $$\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\, dx$$
>
> *Se suele anotar $\langle f(x) \rangle$ para referirse a este valor medio.*

Observen que el cálculo del valor medio $\langle f(x) \rangle$ de una función es análogo al promedio de un conjunto de números. Para un conjunto finito de números, se suman todos ellos y se divide por la cantidad de números. Para funciones, se integra en todo el intervalo y se divide por la longitud del intervalo.

Analicemos una función $f(x)$ continua que no es constante en un intervalo $[a, b]$, como en la figura anterior. En el gráfico resulta claro que la altura apropiada h es algún valor **intermedio** entre el mínimo y el máximo de la función en $[a, b]$ (porque si h fuera mayor que el máximo, el rectángulo tendría mayor área que la encerrada por la curva; o si h fuera menor que el mínimo, el rectángulo tendría menor área que la encerrada por la curva). Recuerden que el Teorema del Valor Extremo asegura que existen el máximo y el mínimo absoluto, que se alcanzan en puntos de $[a,b]$, porque $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado. Además, dado que h está entre el mínimo y el máximo de la función, el Teorema del Valor Intermedio asegura que existe un número c en $[a,b]$ tal que $h = f(c)$:



Podemos afirmar entonces que **el valor medio de la función** en el intervalo $[a,b]$ **coincide con el valor de la función en algún punto** c *de* $[a,b]$.

Este resultado se conoce como Teorema del Valor Medio para Integrales y se enuncia como

Teorema del Valor Medio para Integrales

Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces existe un número c en $[a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

En palabras, el valor medio $h = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ de la función en el intervalo $[a,b]$ coincide con el valor de la función en algún punto c de $[a,b]$.

Aunque dibujamos áreas geométricas positivas por simplicidad, la situación descripta es válida para cualquier función continua en un intervalo cerrado, incluso cuando $f(x)$ no sea positiva (en ese caso las áreas mencionadas son algebraicas, con su correspondiente signo).

Actividades

Actividad 7.2.3.1. Para fijar conceptos, elaboren la siguiente pregunta:

- ¿Qué entienden por valor medio de una función en un intervalo? Den un ejemplo sencillo.

Actividad 7.2.3.2. Calculen el valor medio de la función lineal $f(x) = 1 + 2x$ en el intervalo $[2,4]$ (usen la interpretación de áreas para llegar a un resultado).

Grafiquen la función y el valor medio obtenido. ¿Les parece razonable el resultado?

7.3 Teoremas del cálculo integral

Contenidos de esta sección: funciones definidas por integrales. Teorema Fundamental del Cálculo. Integral indefinida, o primitiva. Regla de Barrow.

En esta sección concentraremos todo el desarrollo teórico que permite calcular integrales sin necesidad de pasar por las sumas de Riemann. En las siguientes trabajaremos con reglas prácticas y aplicaciones.

7.3.1 Funciones definidas por integrales

Hasta aquí hemos trabajado integrales de Riemann en intervalos cerrados $[a, b]$, donde los límites de integración a y b fueron valores dados (fijos). Ahora vamos a considerar la posibilidad de que el borde b del intervalo sea **variable**; naturalmente, si el resultado de calcular una integral $\int_a^b f(x)\,dx$ existe y es único para valores de b dentro de cierto dominio, estamos hablando de una función de variable b. Con este mecanismo **podemos definir funciones nuevas, usando integrales**.

Para tratar al borde derecho del intervalo de integración como una variable independiente, siguiendo la notación habitual, será conveniente llamarlo x. Y para evitar confusiones, no podremos usar la misma letra x para la variable de integración; aprovechando que la variable de integración es muda, elegiremos otra letra, por ejemplo u, como variable de integración. El planteo en general es el siguiente:

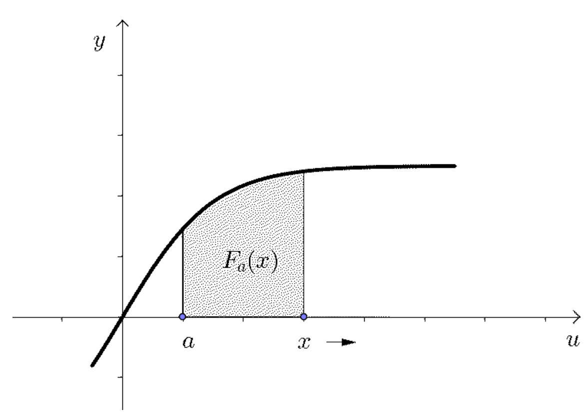
Consideremos un intervalo I en el eje real y una función $f : I \to \mathbb{R}$, que sea integrable en cada intervalo cerrado incluido en I. Usemos la letra u para indicar la variable de la función, y elijamos un valor fijo de u dentro del intervalo I, que llamamos $u = a$. Para cada valor x dentro del intervalo I podemos calcular la integral definida

$$\int_a^x f(u)\,du$$

que existe y da un resultado único (incluso cuando x queda a la izquierda de a o cuando $x = a$). Es decir, esta integral le asigna a cada $x \in I$ un y solo un número real, el resultado de la integral: el resultado es una **función de** x, que anotaremos:

$$F_a : I \to \mathbb{R}, \text{ dada por } F_a(x) = \int_a^x f(u)\,du$$

Gráficamente, esta función $F_a(x)$ representa el área algebraica acumulada entre la gráfica de $y = f(u)$ y el eje u, comenzando en $u = a$ y hasta llegar a $u = x$:



Nos interesa que x se pueda mover como una **variable** (por eso agregamos una flechita en el gráfico); al mover x se corre la "pared" de la región sombreada, de forma que su área algebraica $F_a(x)$ depende de x. Es importante notar que el valor de la variable x puede quedar a la derecha de a (como en la figura) o a la izquierda de a (de forma que la integral queda recorrida "al revés") o incluso coincidir con a (de forma que $F_a(a) = 0$).

La notación que usamos para nombrar esta función es la mayúscula F correspondiente a la función nombrada con minúscula f en el integrando. Además, agregamos un subíndice a para recordar dónde comienza la integral. Algunos libros llaman **función área** a esta construcción, por su significado geométrico. En este curso, por la forma de construirla, preferimos hablar de **función integral** (en el mismo sentido en que se habla de funciones polinómicas, racionales, etcétera, según la forma en que están construidas).

EJEMPLO 7.3.1.1. Consideremos la función $f(x) = 2x + 3$ en el intervalo $[-1, 3]$.

Como la función $f(x)$ está definida y es continua en el intervalo $[-1, 3]$, podemos construir la integral de Riemann entre -1 y x, para $-1 \leq x \leq 3$. Usando la letra u como variable de integración, la función integral es

$$F_{-1}(x) = \int_{-1}^{x} (2u + 3)\, du$$

Es importante apreciar que la función $F_{-1}(x)$ del ejemplo está bien definida, aunque todavía no sepamos cómo calcular la integral: por el teorema de existencia de integrales de funciones continuas, la expresión $\int_{-1}^{x}(2u+3)\, du$ asigna un y solo un valor a cada x en $[-1, 3]$.

Actividades

ACTIVIDAD 7.3.1.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes consignas:

- Expliquen por qué una integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ representa un número, y no una función. Indiquen condiciones apropiadas para asegurar que ese número existe.
- Expliquen por qué una integral de la forma $\int_a^x f(u)\, du$ representa una función, y no un número. ¿Cuál es la variable de esa función? Indiquen condiciones apropiadas para asegurar que esa función está bien definida (es decir, aclaren cuál será el dominio de esa función).

ACTIVIDAD 7.3.1.2. Interpreten la expresión

$$\int_1^x \frac{1}{u}\, du$$

como una función de la variable x. Según las condiciones que aseguran la existencia de la integral, ¿para qué valores de x se puede calcular esta función?

Será interesante revisar esta actividad después de trabajar la sección 9.2.1.

7.3.2 El Teorema Fundamental del Cálculo

La función integral $F_a(x)$ que discutimos en la sección anterior tiene dos propiedades destacables. En primer lugar:

Si $f(x)$ es continua en un intervalo I, o tiene una cantidad finita de discontinuidades evitables o del tipo salto, y a es un punto de I, entonces la función integral definida en I como $F_a(x) = \int_a^x f(u)\, du$ es una función continua *en todo el intervalo I.*

La idea geométrica detrás de este enunciado es que la acumulación de diferenciales de área bajo una curva continua, o incluso con discontinuidades del tipo salto, no puede producir una discontinuidad en el área acumulada: ante un incremento infinitesimal de x la función integral aumenta en una cantidad también infinitesimal y por lo tanto no sufre saltos.

Por otro lado, la siguiente propiedad tiene una importancia central en la teoría de integrales:

Teorema Fundamental del Cálculo

Consideren una función $f(x)$ integrable en un intervalo I, un punto a en I y la función integral definida en I como $F_a(x) = \int_a^x f(u)\,du$.
Si $f(x)$ es continua en $x_0 \in I$, entonces la función integral $F_a(x)$ es derivable *en x_0 y su* derivada en ese punto *está dada por*

$$F_a'(x_0) = f(x_0)$$

(con más detalle, si el intervalo I es cerrado y x_0 es uno de sus bordes, la expresión dada se refiere a la derivada lateral de $F_a(x)$).

Noten que este teorema pide que $f(x)$ sea integrable en el intervalo I, lo cual significa que exista la integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ para cualquier par de puntos x_1 y x_2 en I, y solo pide que $f(x)$ sea continua en un punto x_0 de I. En ese caso, solo afirma que $F_a(x)$ es derivable en ese punto.

Un caso particularmente útil, que usaremos con frecuencia, se refiere a funciones continuas en todo el intervalo I: como enunciamos en la sección 7.2.1, una función continua en un intervalo es integrable en ese intervalo. Aplicando el enunciado anterior podemos afirmar:

Teorema Fundamental del Cálculo (para funciones continuas)

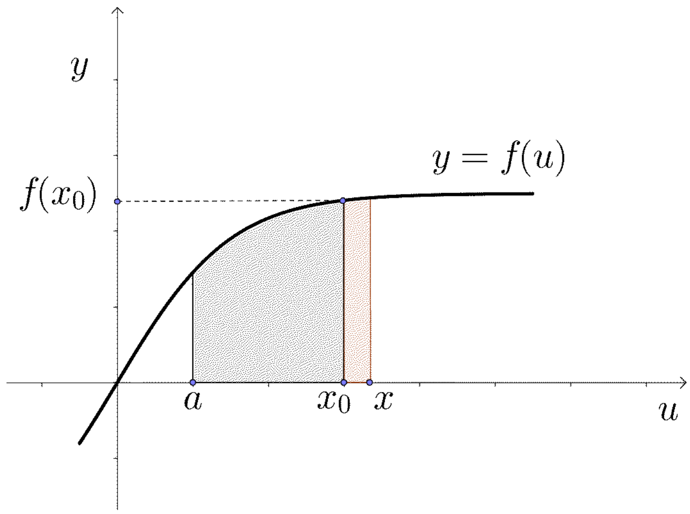
Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo I, y a es un punto en I, entonces la función integral definida como $F_a(x) = \int_a^x f(u)\,du$ es derivable *en I y su* función derivada *está dada por*

$$F_a'(x) = f(x)$$

(con más detalle, si el intervalo I es cerrado, en sus bordes la expresión dada se refiere a la derivada lateral de $F_a(x)$).

Dada la importancia de este teorema, vamos a presentar su demostración al menos en el caso de funciones continuas. Elijamos un punto x_0 en el intervalo y probemos que $F_a(x)$ es derivable en ese punto x_0. Para eso debemos calcular la derivada por definición, comenzando con el cociente incremental de $F_a(x)$ entre el punto x_0 y un punto x vecino,

$$\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0}$$



Por la aditividad de la integral respecto del intervalo, podemos escribir

$$\begin{aligned} F_a(x) - F_a(x_0) &= \int_a^x f(u)\,du - \int_a^{x_0} f(u)\,du \\ &= \int_a^{x_0} f(u)\,du + \int_{x_0}^{x} f(u)\,du - \int_a^{x_0} f(u)\,du \\ &= \int_{x_0}^{x} f(u)\,du \end{aligned}$$

Dado que en este caso particular f es continua entre x_0 y x, el Teorema del Valor Medio para Integrales permite escribir

$$\int_{x_0}^{x} f(u)\,du = f(c)(x - x_0)$$

donde c es un número entre x_0 y x. Reemplazando en el cociente incremental ,

$$\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(c)(x - x_0)}{(x - x_0)} = f(c)$$

Finalmente tomamos el límite del cociente incremental para $x \to x_0$. Como c está atrapado entre x_0 y x, cuando $x \to x_0$ necesariamente $c \to x_0$. Además, $f(c)$ es continua en $c = x_0$. Entonces existe el límite

$$\lim_{x \to x_o} \frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = \lim_{c \to x_0} f(c) = f(x_0)$$

y queda demostrado el teorema.

Aunque el gráfico solo ilustra la situación más sencilla, que es el límite del cociente incremental por derecha $x \to x_0^+$ en un punto x_0 interior al intervalo I, todos los pasos son válidos también para el límite por izquierda. Además es válido que, si el intervalo I es cerrado, entonces $F_a(x)$ admite derivada lateral por derecha en su borde izquierdo y derivada lateral por izquierda en su borde derecho.

Ejemplo 7.3.2.1. Consideremos la función definida en el ejemplo 7.3.1.1 como

$$F_{-1}(x) = \int_{-1}^{x} (2u + 3)\,du$$

para valores de x en el intervalo $[-1, 3]$.

Como la función del integrando, $f(u) = 2u + 3$, está definida y es continua en el intervalo $[-1, 3]$, el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la función integral $F_{-1}(x)$ es derivable en el intervalo abierto $(-1, 3)$ y que

$$(F_{-1})'(x) = 2x + 3$$

Además, $F_{-1}(x)$ es derivable por derecha en $x = -1$, con $(F_{-1})'_+(-1) = 1$ y derivable por izquierda a en $x = 3$, con $(F_{-1})'_-(3) = 9$.

En la construcción de la función integral $F_a(x)$ hemos elegido un valor a como punto inicial de integración. Cambiando este valor inicial se pueden construir **distintas** funciones integrales. Naturalmente, si $f(x)$ es continua en un intervalo I, todas las funciones integrales con distinto punto inicial dentro de I cumplen con el Teorema Fundamental del Cálculo. Por ejemplo, eligiendo como a y b dos puntos distintos de I, las funciones integrales

$$F_a(x) = \int_a^x f(u)\, du \quad \text{y} \quad F_b(x) = \int_b^x f(u)\, du$$

son ambas derivables en I. Sus funciones derivadas, según el teorema, son iguales:

$$F'_a(x) = f(x) \quad y \quad F'_b(x) = f(x)$$

Este resultado no debe sorprender demasiado. Noten que podemos relacionar $F_a(x)$ y $F_b(x)$ por la propiedad de aditividad de las integrales definidas:

$$F_a(x) = \int_a^x f(u)\, du = \int_a^b f(u)\, du + \int_b^x f(u)\, du = F_b(x) + \int_a^b f(u)\, du$$

donde la última integral resulta un número independiente de x. Esta relación indica que

$$F_a(x) = F_b(x) + \text{constante}$$

y en consecuencia sus derivadas son iguales. En palabras, se suele decir que las distintas funciones integrales de un mismo integrando $f(u)$ difieren a lo sumo en una **constante aditiva**.

Actividades

ACTIVIDAD 7.3.2.1. Para fijar conceptos, elaboren la siguiente consigna:

- Expliquen cómo se puede calcular la derivada respecto de x de la función dada por

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

  y fundamenten su explicación.

Será interesante revisar esta actividad después de trabajar la sección 9.2.3.

ACTIVIDAD 7.3.2.2. Usando el Teorema Fundamental del Cálculo pueden calcular derivadas de otras funciones definidas mediante integrales. Por ejemplo, si $f(x)$ es continua en cierto intervalo y permite definir $F_a(u) = \int_a^u f(v)\, dv$ como hemos hecho en el texto, y además $u(x)$ es cierta función conocida de la variable x, entonces la expresión

$$g(x) = \int_a^{u(x)} f(v)\, dv$$

tiene forma de función compuesta

$$g(x) = F_a(u(x))$$

Suponiendo que $u(x)$ es derivable,

- construyan una expresión para la función derivada $g'(x)$.
- completen esta actividad discutiendo con más precisión dónde es válida expresión hallada.

Actividad 7.3.2.3. Analicen la expresión $g(x) = \int_1^{3x} \cos(u^2)\,du$ como función de x y calculen su función derivada. ¿Dónde es válida la expresión hallada?

Actividad 7.3.2.4. Volviendo al problema planteado en el inicio de este capítulo,

- ¿Cuántos litros de combustible se vertieron en el tanque en los primeros 30 segundos de encendida la bomba?
- ¿Cuántos litros más se vertieron en el resto del primer minuto?

7.3.3 Función primitiva, o integral indefinida

Dada una función continua $f(x)$ en cierto intervalo, el Teorema Fundamental del Cálculo relaciona la función integral $F_a(x)$, que aún no sabemos calcular, con la función $f(x)$ que sí conocemos, mediante una derivada:

$$F_a'(x) = f(x)$$

Cabe preguntarse si podríamos encontrar la expresión de $F_a(x)$ **directamente a partir de esta relación**. Esta observación nos enfrenta con el problema general de construir una función $F(x)$ a partir de conocer su derivada $f(x)$. Si logramos hacerlo, $F(x)$ se llama **función primitiva** de $f(x)$.

> *Consideren una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$.*
> *Si existe $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivable en (a,b) y verifica $F'(x) = f(x)$, se dice que $F(x)$ es una* **función primitiva** *de $f(x)$ en (a,b).*

Observen que anotamos "una" función primitiva. No corresponde decir "la" función primitiva por la siguiente propiedad:

> *La primitiva de una función no es única.*
> *Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en un intervalo (a,b), entonces, para cualquier constante C real, $\tilde{F}(x) = F(x) + C$ también es primitiva de $f(x)$ en el mismo intervalo (a,b).*

Es sencillo demostrar esta propiedad: dado que $F(x)$ está definida en el intervalo (a,b), no hay obstáculo en definir $\tilde{F}(x) = F(x) + C$ en (a,b). Vemos que $\tilde{F}(x)$ es derivable por ser suma de funciones derivables. Su derivada se calcula como $\tilde{F}'(x) = F'(x) + C' = F'(x) = f(x)$. Como $\tilde{F}'(x) = f(x)$, $\tilde{F}(x)$ es **otra primitiva** de $f(x)$ en (a,b).

Por otro lado, si $F(x)$ es una primitiva, la familia de funciones $F(x) + C$ describe **todas** las primitivas posibles. En palabras, podemos afirmar que **las primitivas de una función $f(x)$ en un intervalo (a,b) son únicas, a menos de una constante aditiva** llamada **constante de integración**. Es decir:

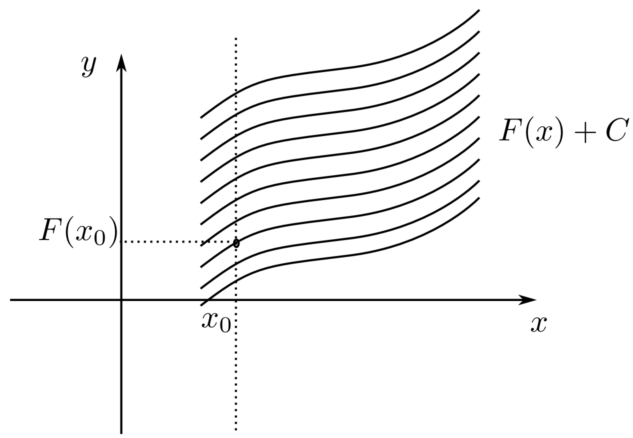
> *Si $F(x)$ y $\tilde{F}(x)$ son dos primitivas de la misma función $f(x)$ en un intervalo (a,b), entonces una se puede escribir a partir de la otra como*
> $$\tilde{F}(x) = F(x) + C$$
> *donde C es un valor constante.*

Para justificar este resultado, observen que siendo $F(x)$ y $\tilde{F}(x)$ dos primitivas de la misma función $f(x)$, la derivada de la diferencia

$$\left(\tilde{F}(x) - F(x)\right)' = \tilde{F}'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Como las únicas funciones con derivada nula son las constantes, concluimos que la resta $\tilde{F}(x) - F(x)$ efectivamente es una constante.

> Las gráficas de la familia completa de primitivas $F(x) + C$ se obtienen a partir de la gráfica de cualquier primitiva $F(x)$ mediante traslaciones en el eje vertical.



Búsqueda de primitivas

La búsqueda de una primitiva $F(x)$ se puede hacer consultando la tabla de derivadas: dado que $F'(x) = f(x)$, lo que necesitamos encontrar es una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$. Por esta razón a la construcción de primitivas se la llama **antiderivación**, y a la primitiva también se la llama **antiderivada.**

EJEMPLO 7.3.3.1. Dada $f(x) = 2x$, es fácil descubrir que $F(x) = x^2$ es una primitiva, ya que $\left(x^2\right)' = 2x$.

No todas las primitivas se van a encontrar inmediatamente en la tabla de derivadas. Trabajaremos en las próximas secciones con varios métodos que ayudan en la búsqueda de primitivas.

Función integral y función primitiva

Volviendo a la pregunta inicial de esta sección 7.3.3, el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la función integral $F_a(x)$ tiene como derivada a $f(x)$;es decir, la función integral $F_a(x)$ es una de las posibles primitiva de $f(x)$. Entonces, si por algún método encontramos una primitiva $F(x)$, debe cumplirse que

$$F_a(x) = F(x) + C$$

A menos de una constante C aditiva, que no será difícil de hallar, tendremos construida una expresión explícita de la función integral $F_a(x)$.

Este resultado es de fundamental importancia en el cálculo de integrales definidas[4]: **reemplaza** el trabajoso cálculo de las sumas de Riemann, y su correspondiente límite, por la **búsqueda de una antiderivada o primitiva**.

La integral indefinida

La teoría que hemos desarrollado en esta sección establece una íntima relación entre el cálculo de integrales y el cálculo de primitivas. El Teorema Fundamental del Cálculo afirma que una función integral $F_a(x)$ (concepto que surge del cálculo de integrales) es una primitiva o antiderivada (concepto que surge como operación inversa de la derivada) de la función $f(x)$. Más aún, una función integral y una función primitiva son lo mismo, excepto por alguna constante aditiva.

Por esta íntima relación se identifican los lenguajes: es usual decir integrar cuando uno busca una primitiva o antiderivada, y se llama tabla de integrales a las tablas de primitivas. También se unifica la notación, usando

[4] Algunos autores lo consideran parte del Teorema Fundamental del Cálculo.

el símbolo integral para expresar una primitiva; se anota

$$\int f(x)\,dx$$

(sin límites de integración) para indicar la familia de funciones primitivas de $f(x)$, de forma tal que

$$\int f(x)\,dx \quad \text{y} \quad F(x)+C$$

son notaciones equivalentes. El lado izquierdo se llama integral indefinida de $f(x)$:

> *Se llama* integral indefinida *de una función $f(x)$ a la expresión*
>
> $$\int f(x)\,dx$$
>
> *que se usa para representar las primitivas de $f(x)$. Se puede leer como* **primitiva** *de $f(x)$,* **antiderivada** *de $f(x)$, o* **integral** *de $f(x)$.*
> *Por esta definición, se cumple que*
>
> $$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

Es muy importante reconocer que, a pesar de la notación integral, $\int f(x)\,dx$ se refiere a **una función de variable** x. Muy distinto es el concepto de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ que se refiere a **un número**.

Ejemplo 7.3.3.2. Verifiquen que la forma explícita propuesta para las siguientes integrales indefinidas es correcta, y en cada caso identifiquen el dominio de validez de la primitiva indicada:

- $\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$
- $\int \cos(2t)\,dt = \frac{1}{2}\text{sen}(2t) + C$

Función integral e integral indefinida

Dado que, cuando $f(x)$ es continua, la función integral $F_a(x) = \int_a^x f(u)\,du$ es una primitiva de $f(x)$, también se la puede identificar con la integral indefinida. Algunos autores directamente llaman integral indefinida a las integrales de la forma $\int_a^x f(u)\,du$; en este caso se refieren a una primitiva particular, y no la familia completa de primitivas. Estos autores suelen usar la notación $\int^x f(u)\,du$ (sin indicar el punto inicial del intervalo de integración) para referirse a la familia completa de primitivas.

Actividades

Actividad 7.3.3.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes consignas:

- Verifiquen que $F(x) = \ln(x)$ es una antiderivada de $f(x) = 1/x$. ¿En qué dominio es válida esta afirmación?
- ¿Qué entienden por la notación

  $$\int \frac{1}{x}\,dx\ ?$$

  ¿Cómo la leen? ¿Representa un número, o una función, o una familia de funciones?
- Escriban todas las primitivas de $f(x) = 1/x$.

7.3.4 Regla de Barrow

La regla de Barrow es el resultado práctico que permite calcular integrales definidas de la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

usando la teoría de funciones primitivas (o antiderivadas, o integrales indefinidas) de la sección 7.3.3. A esta altura del capítulo de integrales la podemos presentar como una aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo. Lo hacemos como un razonamiento que además nos sirve de repaso.

Si $f(x)$ es continua en un intervalo $[a,b]$, la función integral $F_a(x) = \int_a^x f(u)\,du$ es una primitiva de $f(x)$ para todo x en $[a,b]$. Si por algún método (en general antiderivando) conocemos otra primitiva $F(x)$ de $f(x)$ en todo $[a,b]$, entonces existe alguna constante C que las relaciona mediante una igualdad de funciones:

$$F_a(x) = F(x) + C$$

Es sencillo averiguar el valor de C que cumple esta igualdad. Basta evaluarla en $x = a$,

$$F_a(a) = F(a) + C$$

y usar que $F_a(a) = \int_a^a f(u)\,du = 0$; tenemos que $F(a) + C = 0$ y de allí despejamos que $C = -F(a)$. Reemplazando, la expresión relaciona la función integral $F_a(x)$ con la otra primitiva$F(x)$ es

$$F_a(x) = F(x) - F(a)$$

Ahora bien, el valor de esta función integral $F_a(x)$ en $x = b$ es la integral que queremos calcular:

$$F_a(b) = \int_a^b f(u)\,du$$

(recuerden que la variable de integración es muda, por lo que $\int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(x)\,dx$ es realmente la integral que queremos calcular). Usando que $F_a(x) = F(x) - F(a)$ en cualquier x de $[a,b]$, podemos evaluar en $x = b$ y escribir que

$$F_a(b) = F(b) - F(a)$$

Entonces, comparando

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Con este razonamiento hemos probado la siguiente regla práctica para calcular integrales definidas:

Regla de Barrow

Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y admite una primitiva $F(x)$ en $[a,b]$, entonces el resultado de su integral definida se puede calcular como

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Notación

La regla de Barrow se usa con tanta frecuencia que hay una notación especial para expresar la resta del lado derecho. Se anota

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

donde $[F(x)]_a^b$ significa $[F(x)]_a^b \equiv F(b) - F(a)$. Se suele leer "$F$ en b menos F en a".

Observación

Probablemente se pregunten qué primitiva se debe usar en la regla de Barrow, ya que la primitiva no es única. Noten que si cambiamos la primitiva sumándole una constante C, el resultado de la Regla de Barrow no cambia: la constante aparecerá sumando junto a $F(b)$ y restando junto a $F(a)$, por lo que se cancela. Por lo tanto pueden usar cualquier primitiva que consigan.

EJEMPLO 7.3.4.1. Aprovechemos la regla de Barrow para resolver el problema con que iniciamos el capítulo de integral de Riemann: necesitamos calcular el volumen de líquido vertido en un tanque que se llena con un caudal Q variable, en los primeros 60 segundos desde que se enciende una bomba. Según el manual del fabricante de la bomba, el caudal instantáneo responde a la fórmula

$$Q(t) = 5(1 - \exp(-t/10))$$

(en litros/segundo y escrita sin unidades, por simplicidad; el tiempo se representa en segundos y el volumen de líquido en litros).

Como el volumen vertido en un tiempo infinitesimal dt se calcula multiplicando el caudal por el tiempo, podemos expresar la correspondiente contribución infinitesimal dV al volumen total como

$$dV = Q(t)\, dt$$

El total de líquido vertido en 60 segundos se obtiene sumando las contribuciones infinitesimales; esto se expresa mediante la integral

$$\int_0^{60} Q(t)\, dt$$

Intentemos resolver esta integral usando la regla de Barrow. En primer lugar verificamos que la función $Q(t) = 5 - 5e^{-t/10}$ es continua en todo el eje real, por lo que se puede aplicar la regla en el intervalo $[0, 60]$. En segundo lugar necesitamos una primitiva de $Q(t)$; en las próximas clases se entrenarán para conseguirla. Por ahora comprueben que $5t + 50e^{-t/10}$ es una primitiva:

$$\frac{d}{dt}\left(5t + 50e^{-t/10}\right) = 5 - 5e^{-t/10}$$

Estamos en condiciones de aplicar la regla de Barrow y calcular

$$\begin{aligned}
\int_0^{60} \left(5 - 5e^{-t/10}\right) dt &= \left[5t + 50e^{-t/10}\right]_0^{60} \\
&= \left(5 \cdot 60 + 50e^{-60/10}\right) - \left(5 \cdot 0 + 50e^{-0/10}\right) \\
&= 300 + 50e^{-6} - 50 \\
&= 250.12398\cdots
\end{aligned}$$

Para recuperar las unidades de este resultado observen que cuando multiplicamos el caudal $Q(t)$ en $\mathrm{litros/segundo}$ por el diferencial de tiempo en segundos, el resultado queda expresado en litros.

El planteo de la integral, junto con la regla de Barrow para resolverla, nos permite contestar con precisión que en el primer minuto de bombeo se vierten 250.12398$\cdots$ litros de combustible.

Interpretación intuitiva de la regla de Barrow

Antes de terminar este capítulo les proponemos discutir una interpretación de la regla de Barrow. Esperamos que sea de utilidad práctica en diversas aplicaciones de la integral.

Como ya vimos, para calcular la integral definida de una función $f(x)$ continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ la regla requiere conocer una primitiva $F(x)$ válida en ese intervalo. Es decir, nos requiere escribir al integrando como derivada de otra función, $f(x) = F'(x)$. Usemos esto para escribir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx$$

Pensemos la integral como suma de contribuciones infinitesimales. Antes de tomar el límite en que los sub-intervalos Δx tienden a cero, en lugar de la integral tenemos una suma de Riemann sobre una partición del intervalo $[a, b]$,

$$\int_a^b F'(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{N} F'(x_j^*)\Delta x_j$$

Suponiendo que los sub-intervalos Δx_j ya son pequeños (tanto como uno quiera), los podemos nombrar con notación diferencial, como dx. Eligiendo los $x_j^* = x_j$ (es decir, al comienzo de cada sub-intervalo), cada **contribución infinitesimal** $F'(x_j)\,dx$ a la suma se reconoce como el **diferencial de** $F(x)$ que discutimos en la sección 3.2.1, construido en cada punto x_j de la partición

$$dF_j = F'(x_j)\,dx$$

Este diferencial dF_j representa el incremento aproximado de la función $F(x)$ cuando la variable pasa del valor x_j al valor cercano $x_j + dx$. Ahora bien, cuando sumamos los incrementos de $F(x)$ en cada sub-intervalo, esperamos obtener el incremento total de $F(x)$ al pasar de $x = a$ a $x = b$,

$$\sum_{j=1}^{N} F'(x_j)\,dx = \sum_{j=1}^{N} dF_j \approx F(b) - F(a)$$

Esto es precisamente lo que asegura la regla de Barrow, al menos cuando el integrando es continuo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b dF = F(b) - F(a)$$

El ingrediente informal de este argumento es que tratamos a la integral de Riemann como una **suma de diferenciales**. Aunque sabemos que podemos mejorar arbitrariamente la aproximación diferencial si tomamos incrementos cada vez más pequeños, la suma de Riemann tendrá una cantidad arbitrariamente grande de términos. Se necesita una discusión más profunda para estudiar el error que puede producir la suma de una cantidad muy grande de errores muy pequeños.

Alternativamente, el Teorema Fundamental del Cálculo y su consecuencia práctica, la regla de Barrow, nos aseguran rigurosamente que el resultado es correcto cuando la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ (para formalizarlo han estudiado todo este capítulo).

Vale la pena destacar que la interpretación de la integral de Riemann como una suma de diferenciales tiene gran valor constructivo; es muy útil al hacer aplicaciones, seguramente en otras materias plantearán situaciones con este nivel de informalidad.

Actividades

Actividad 7.3.4.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se calcula el resultado de una integral definida usando primitivas? Indiquen las hipótesis que se deben cumplir para aplicar el método propuesto.
- Si comparan este trabajo con la evaluación del límite de una sucesión de sumas de Riemann, ¿cuál es más eficiente?

ACTIVIDAD 7.3.4.2. Aprovechando que $\cos(x) = \dfrac{d}{dx}\text{sen}(x)$, calculen la integral definida

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\, dx$$

ACTIVIDAD 7.3.4.3. Razonando como en la actividad anterior, calculen

- $\int_0^{10} 2x\, dx$
- $\int_4^9 \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$
- $\int_0^1 e^x\, dx$

En cada caso, escriban el integrando como la derivada de alguna función conocida.

GEOGEBRA 7.3.4.4. Calculen con GeoGebra las integrales anteriores. Visualicen la gráfica del integrando y el área sombreada, además del resultado numérico.

CAPÍTULO 8
Técnicas de integración

Contenidos del capítulo: tabla de primitivas. Técnicas básicas de integración: integral por sustitución e integral por partes. Recomendaciones para buscar primitivas en distintos casos: descomposición en fracciones simples, sustituciones trigonométricas.

8.1 Cálculo de primitivas

Contenidos de esta sección: tabla de primitivas básicas. Propiedades de la integral indefinida.

Como vimos en el capítulo anterior, para calcular una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ usando la regla de Barrow primero tendrán que:

1. verificar que $f(x)$ sea continua en el intervalo cerrado $[a,b]$
2. construir una primitiva de $f(x)$ válida al menos en $[a,b]$

Después de este trabajo, si llamamos $F(x)$ a la primitiva de $f(x)$, la regla de Barrow nos permite afirmar que

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

El paso más trabajoso de este proceso suele ser construir una primitiva, y a eso dedicaremos este capítulo.

8.1.1 Tabla de primitivas básicas

El primer paso para encontrar una primitiva de una función $f(x)$, a simple vista, es recordar muy bien la tabla de derivadas. Así podrán encontrar la primitiva reconociendo cuál función $F(x)$ tiene como derivada a $f(x)$. El mecanismo es similar al de aprender a dividir números enteros: para dividir hay que pensar en las tablas de multiplicar, y saberlas bien de memoria.

> Ejemplo 8.1.1.1. Como primer ejemplo, hallemos una primitiva de la función $f(x) = \cos x$.
> Recordando que $(\text{sen } x)' = \cos x$ en todo el eje real, reconocemos que
>
> $$F(x) = \text{sen } x$$
>
> es una primitiva de $\cos x$ en todo el eje real.
> Si queremos expresar **todas** las primitivas de $f(x)$ debemos sumar una constante C arbitraria, llamada **constante de integración**. En este curso anotamos a la familia de todas las primitivas como integral indefinida:
>
> $$\int \cos x\,dx = \text{sen } x + C$$

EJEMPLO 8.1.1.2. Hallemos la familia de primitivas de $g(x) = x$.

Conviene recordar que $(x^2)' = 2x$ en todo el eje real. Usando propiedades de la derivada para re-ubicar el coeficiente 2 reconocemos que

$$\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$$

es una primitiva de $g(x)$. Luego

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

es la familia completa de primitivas de $g(x) = x$ en todo el eje real.

Razonando de la misma manera, pueden comprobar que para $h(x) = x^2$ se construye la familia de primitivas en todo el eje real como

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Como ya discutimos en el Capítulo 7, se usan distintos nombres equivalentes para hablar del mismo concepto: función primitiva, antiderivada o integral indefinida. Esto se debe a que son construcciones inicialmente distintas, y luego el Teorema Fundamental del Cálculo muestra que son equivalentes. También se usan distintas notaciones, y es importante reconocer cuáles son equivalentes.

- La notación de la primitiva como integral indefinida es la más utilizada en la práctica. Por ejemplo, anotar

  $$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

  nos permite liberarnos de los nombres de las funciones para concentrarnos en sus fórmulas. Además, sabiendo que la integral indefinida se construye como una integral de Riemann, permite aprovechar sus propiedades (por ejemplo la linealidad) para encontrar resultados explícitos.
- Otra opción usual para anotar las primitivas de una función es usar la correspondiente letra mayúscula; por ejemplo, si $h(x) = x^2$ podemos anotar una primitiva como $H(x) = \dfrac{x^3}{3}$ y la familia completa de primitivas como $H(x) + C$.

Para sistematizar la búsqueda de primitivas es necesario entonces construir una **tabla de primitivas básicas**, replicando las reglas básicas de derivación, y memorizarla. Esta tabla se irá ampliando a medida que calculen nuevas derivadas que valga la pena registrar. Un formato posible para la tabla es el siguiente:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	intervalos de validez
0	C	$(-\infty,+\infty)$
k (constante)	$kx+C$	$(-\infty,+\infty)$
x	$\dfrac{x^2}{2}+C$	$(-\infty,+\infty)$
x^n, con $n\in\mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$(-\infty,+\infty)$
$\sqrt{x}=x^{1/2}$	$\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$	$[0,+\infty)$
$\dfrac{1}{x}=x^{-1}$	$\ln x+C$	$(0,+\infty)^*$
$\dfrac{1}{x}=x^{-1}$	$\ln(-x)+C$	$(-\infty,0)^*$
x^{-m}, con $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 2$	$\dfrac{x^{-m+1}}{-m+1}+C$	$(-\infty,0)$ ó $(0,+\infty)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x^{-1/2}$	$\dfrac{x^{1/2}}{1/2}+C$	$(0,+\infty)$
e^x	e^x+C	$(-\infty,+\infty)$
$x^r=e^{r\ln x}$ $(r\neq -1)$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1}+C$	$(0,+\infty)$
sen x	$-\cos x+C$	$(-\infty,+\infty)$
$\cos x$	sen$x+C$	$(-\infty,+\infty)$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+C$	$(-\pi/2,\pi/2)$
senh$x$	$\cosh x+C$	$(-\infty,+\infty)$
$\cosh x$	senh$x+C$	$(-\infty,+\infty)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	arctan$(x)+C$	$(-\infty,+\infty)$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	argtanh$(x)+C$	$(-1,1)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	argsenh$(x)+C$	$(-\infty,+\infty)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	argcosh$(x)+C$	$(-1,+\infty)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arcsen$(x)+C$	$(-1,1)$

$(*)$ Se pueden juntar estos resultados y escribir la primitiva de $1/x$ como $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$, válida en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Para verificar estas primitivas basta con derivar las expresiones de la segunda columna, y controlar que en cada caso se cumpla

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$$

Recomendamos hacer esta comprobación cada vez que surjan dudas al recordar estos resultados. También recomendamos personalizar esta tabla: todas las derivadas que hayan encontrado dignas de memorizar tienen su lugar en la tabla de primitivas.

Actividades

ACTIVIDAD 8.1.1.1. Para ir memorizando con confianza:

- Verifiquen todas las primitivas presentadas en la tabla anterior.
- Impriman la tabla, y ténganla a mano para trabajar el resto del curso.

Actividad 8.1.1.2. Si no lo hicieron en la actividad anterior, comprueben en detalle que cuando $r \neq -1$ es un número real (tanto positivo como negativo), la primitiva de $f(x) = x^r = e^{r \ln x}$ en $(0, +\infty)$ es $F(x) = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C$.

Actividad 8.1.1.3.

- Hallen primitivas para $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[5]{x}$, $x^{1/4}$. ¿En qué dominio son válidas las primitivas halladas?
- Hallen primitivas para $x^{-1/3}$, $x^{-1/4}$, $1/\sqrt[5]{x}$ (usen como modelo la primitiva de $x^{-1/2}$ que está en la tabla básica). ¿En qué intervalos son válidas las primitivas halladas? ¿Cómo representan la familia completa de primitivas en cada caso?

GeoGebra 8.1.1.4. Pueden usar GeoGebra para encontrar integrales indefinidas (o primitivas). Una vez que tienen declarada una función $f(x)$, simplemente escriban el comando

```
Integral[f]
```

8.1.2 Propiedades de la función primitiva

Las primitivas de funciones continuas se pueden pensar de dos maneras: como antiderivadas o como funciones integrales. El Teorema Fundamental del Cálculo asegura que los dos puntos de vista son lo mismo, a menos de una constante aditiva. Una ventaja de este hecho es que las propiedades de las funciones primitivas se pueden obtener de dos maneras: a partir de propiedades de las integrales, o bien a partir de propiedades de las derivadas.

En esta sección repasamos algunas propiedades (que ya hemos visto en la integral definida) que sirven como reglas prácticas para construir primitivas.

Primitiva de una derivada

Cuando necesitamos las primitivas de cierta función $f'(x)$, sabiendo que es la derivada de una función conocida $f(x)$, la primitiva más directa es la misma función $f(x)$. Lo enunciamos como una sencilla regla:

Si una función $f(x)$ es derivable en (a, b), entonces $f'(x)$ admite primitiva en (a, b):

$$\int f'(x)\, dx = f(x) + C$$

Primitiva de una constante por una función

Si *$f(x)$ admite primitiva en un intervalo (a, b), entonces $c\, f(x)$ admite primitiva en (a, b):*

$$\int c f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$

En palabras, conviene recordar que "un factor constante sale fuera de la integral".

Primitiva de una suma

Si $f(x)$ y $g(x)$ admiten primitiva en un intervalo (a, b), entonces $f(x) + g(x)$ admite primitiva en (a, b):

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

En palabras, conviene recordar que "la integral de una suma es la suma de las integrales". La propiedad de la suma también se aplica a restas, dado que podemos escribir $f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$ y sacar el factor-1 fuera de la integral:

$$\int (f(x) - g(x))\ dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

Primitiva de una suma

Las dos últimas propiedades se conocen como **linealidad**. Se pueden recordar juntas escribiendo

$$\boxed{\int (af(x) + bg(x))\ dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx}$$

EJEMPLO 8.1.2.1. Con la tabla de primitivas y estas reglas podemos calcular, por ejemplo,

$$\int \left(2x^2 + 5e^x\right) dx = 2\int x^2\,dx + 5\int e^x\,dx = \frac{2}{3}x^3 + 5e^x + C$$

Noten que agregamos una sola constante C arbitraria al final del cálculo; no vale la pena agregar una para $\int x^2\,dx$ y otra para $\int e^x\,dx$, ya que finalmente se juntarían en un solo término constante.

Primitivas de productos y cocientes

Es importante destacar que **no hay reglas generales para la primitiva de un producto, ni para la primitiva de un cociente**. Sin embargo, veremos a continuación dos **técnicas que permiten tratar algunos productos**, si su forma se ajusta a ciertos prototipos: la técnica de integración por sustitución y la técnica de integración por partes.

Actividades

ACTIVIDAD 8.1.2.1. Para fijar conceptos, construyan las siguientes primitivas usando propiedades y la tabla básica:

- $\int 2x\,dx$
- $\int 3x^2\,dx$
- $\int (\cos x + \text{sen} x)\ dx$
- $\int \left(\frac{1}{2}x + 3\right)\ dx$

ACTIVIDAD 8.1.2.2. Utilicen primitivas y la regla de Barrow (verificando sus hipótesis de aplicación) para calcular las siguientes integrales definidas:

1. $\int_{-2}^{8} 2x\,dx$
2. $\int_{1}^{3} 3x^2\,dx$
3. $\int_{0}^{\pi} (\cos x + \text{sen} x)\ dx$
4. $\int_{-1}^{4} \left(\frac{1}{2}x + 3\right)\ dx$

ACTIVIDAD 8.1.2.3. Con la regla de Barrow y la tabla de primitivas podemos completar varios planteos hechos en el capítulo 7. Por ejemplo, calculen el valor medio de las siguientes funciones en los intervalos dados:

- $f(x) = 2x + 1$, en el intervalo $[-1/2, 2]$
- $f(x) = x - 1$, en el intervalo $[0, 2]$
- $f(t) = e^t$, en el intervalo $[-1, 1]$

Verifiquen sus resultados con GeoGebra. Además, observen las gráficas e interpreten los resultados obtenidos.

ACTIVIDAD 8.1.2.4. También pueden completar el cálculo de áreas. En particular, pueden calcular áreas de figuras para las cuales no hay una fórmula de Geometría básica.

- Calculen usando una integral el área de la región encerrada por la recta $y = x$ y el eje x, para x entre 0 y 1. Grafiquen, reconozcan la región, y comparen con resultados elementales de geometría.
- Calculen usando una integral el área geométrica de la región encerrada por la gráfica de $y = x^3$ y el eje x, para x entre 0 y 2.
- Calculen usando una integral las áreas geométrica y algebraica de la región encerrada por la gráfica de $y = x^3$ y el eje x, para x entre -2 y 2.

ACTIVIDAD 8.1.2.5. En muchos casos podrán construir expresiones equivalentes para funciones integrales. Háganlo con las siguientes:

- $f(x) = \int_0^x \left(4 + 2u - 3u^2\right)\, du$
- $g(t) = \int_2^t e^x\, dx$
- $h(x) = \int_1^{x^2} 3t^2\, dt$

Cuando expresan estas funciones integrales en términos de funciones conocidas, se suele decir que han hallado una **expresión cerrada** para la integral.

8.2 Técnicas de integración: integrales por sustitución

Contenidos esta sección: cálculo de primitivas por sustitución. Aplicación a la integración definida.

La técnica de integración por sustitución se aplica a **cierto tipo de producto** donde aparecen multiplicadas **una función compuesta** $f(u(x))$ **por la derivada** $u'(x)$ de la función interna. Como siempre que trabajamos con funciones compuestas, tendremos que ser cuidadosos con la notación y con los dominios de cada función.

8.2.1 Integración por sustitución

La técnica de integración por sustitución se basa en el siguiente resultado:

Si una función definida en (a,b) tiene la forma de un producto $f(u(x))\,u'(x)$ donde $u'(x)$ es la derivada de $u(x)$ en (a,b), y $f(u)$ admite primitiva $\int f(u)\,du$ en toda la imagen $u((a,b))$, entonces la función $f(u(x))\,u'(x)$ admite primitiva en (a,b):

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

donde la primitiva del lado derecho debe construirse como función de u y luego evaluarse en $u = u(x)$.

Justificación: para probar esta afirmación debemos derivar el resultado en el lado derecho respecto de x y verificar que obtenemos $f(u(x)) \cdot u'(x)$. Para eso conviene llamar $F(x)$ a una primitiva de $f(x)$ para anotar el lado derecho como $\int f(u)\,du = F(u)$, y escribir explícitamente que se debe evaluar en $u(x)$. Es decir, el lado derecho se interpreta como $F(u(x))$. Usando la regla de la cadena hacemos la derivada, verificando que

$$(F(u(x)))' = F'(u) \cdot u'(x) = f\,(u(x)) \cdot u'(x)$$

para todo punto x de (a,b).

Observen que la regla de sustitución **no resuelve la primitiva**, sino que **la cambia por otra**. Uno espera que la nueva primitiva sea más sencilla de resolver que la original. En la práctica, se usa la regla tentativamente y en una segunda etapa se intenta averiguar si $f(u)$ admite primitiva. Para encontrar

$$\int f(u)\,du$$

recuerden que la variable de integración es muda: operen con u como operarían con la variable x. Por ejemplo, si deben resolver $\int u^2\,du$ consulten la tabla de primitivas que escribimos con variable x y directamente copien que $\int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C$.

> Una forma usual de recordar esta regla se basa en manipular diferenciales, escribiendo $du = u'(x)\,dx$. Pensando informalmente la integral como suma de diferenciales, antes de tomar el límite, vemos que podemos reemplazar $u'(x)\,dx$ por du:
>
> $$f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = f(u)\,du$$
>
> Tomando el límite que define correctamente las integrales se recupera el resultado que ya enunciamos,
>
> $$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$
>
> En la práctica, entonces, se trabaja con una **sustitución de variables**:
>
> $$\begin{array}{rl} u(x) & \text{se sustituye por} \quad u \\ u'(x)\,dx & \text{se sustituye por} \quad du \end{array}$$

Destacamos que este razonamiento explica intuitivamente el rol del diferencial dx en la integral original y el rol del diferencial du en la integral sustituida. Después de reemplazar (no debe quedar ninguna x) se trabaja con la variable u: se debe buscar una primitiva para $f(u)$ (que puede ser sencilla, o no). Cuando encuentren la primitiva de $f(u)$ deben volver a reemplazar $u = u(x)$ para que el resultado sea una función de x (no debe quedar ninguna u).

Ejemplo 8.2.1.1. Calculemos las primitivas $\int x^2 \text{sen}\left(x^3\right) dx$.

Notamos que en el integrando hay una función compuesta, que podemos escribir como sen(u) con $u(x) = x^3$. Antes de intentar la sustitución nos preguntamos si esta función compuesta sen$(u(x))$ aparece multiplicada por $u'(x) = 3x^2$, o bien por el diferencial $du = 3x^2\, dx$. Vemos que aparece multiplicada por x^2, es decir que faltaría el factor 3. Eso lo podemos manipular multiplicando y dividiendo por 3, y acomodando factores fuera de la integral:

$$\begin{aligned}\int \text{sen}\left(x^3\right) x^2\, dx &= \frac{1}{3}\int \text{sen}\left(x^3\right) 3x^2\, dx \\ &= \frac{1}{3}\int \text{sen} u\, du\end{aligned}$$

Ya tenemos hecha la sustitución, ahora hay que resolver $\int \text{sen} u\, du$. Encontramos en la tabla de primitivas que $\int \text{sen} u\, du = -\cos u + C$. Luego,

$$\begin{aligned}\int \text{sen}\left(x^3\right) x^2\, dx &= -\frac{1}{3}\cos\left(u(x)\right) + C \\ &= -\frac{1}{3}\cos\left(x^3\right) + C\end{aligned}$$

Tenemos resuelta la familia de primitivas. Recomendamos siempre verificar el resultado. Es decir, derivar el resultado por regla de la cadena

$$\left(-\frac{1}{3}\cos\left(x^3\right) + C\right)' = -\frac{1}{3}\left(-\text{sen}\left(x^3\right)\right) 3x^2 = x^2 \text{sen}\left(x^3\right)$$

y controlar que coincida con el integrando original.

Ejemplo 8.2.1.2. Una aplicación sencilla del método de sustitución permite manipular factores numéricos en funciones compuestas (aunque no vean un producto de funciones). Por ejemplo, calculemos las primitivas de $\int \cos(2x)\, dx$.

Observando la tabla de integrales, encontramos inmediatamente las primitivas de $\cos(u)$. Pero no encontramos las primitivas de la $\cos(2x)$. Conviene llamar $u(x) = 2x$, con lo cual $du = 2\, dx$, y preparar la integral para que aparezca $\cos(u(x))\, du$:

$$\int \cos(2x)\, dx = \frac{1}{2}\cdot 2\int \cos(2x)\, dx = \frac{1}{2}\int \cos(2x)\cdot 2\, dx$$

Procedemos a sustituir $u = 2x$:

$$\frac{1}{2}\int \cos(2x)\cdot 2\, dx = \frac{1}{2}\int \cos u\, du$$

y usamos el resultado de la tabla de primitivas

$$\int \cos u\, du = \text{sen} u + C$$

Reemplazando $u = 2x$ obtenemos las primitivas buscadas

$$\int \cos(2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\text{sen}(2x) + C\right)$$

Noten que la constante de integración quedó enredada en el cálculo. Es una buena costumbre acomodarla como un término sumando al final del resultado. Para eso distribuimos el factor $\frac{1}{2}$ y renombramos $C/2$ como una nueva constante arbitraria D:

$$\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\text{sen}(2x) + D$$

Verifiquemos el resultado, derivando por regla de la cadena:

$$\left(\frac{1}{2}\text{sen}(2x) + D\right)' = \frac{1}{2}\cos(2x)\cdot 2 = \cos(2x)$$

EJEMPLO 8.2.1.3. En algunos casos podremos utilizar el método de sustitución para integrar cocientes, después de reescribir el integrando como un producto. Analicemos las primitivas

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{1}{x^2+1}\cdot x\,dx$$

Resulta indicado proponer la sustitución $u = x^2+1$, con $du = 2x\,dx$. En detalle,

$$\int \frac{1}{x^2+1}\cdot x\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Observen que en este caso $u = x^2+1 > 0$, entonces $|u| = x^2+1$ y la primitiva resulta válida para todos los x reales. Pueden verificar que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x = \frac{x}{x^2+1}$$

en todos los reales.

Actividades

ACTIVIDAD 8.2.1.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes preguntas:

- ¿En qué casos es indicado aplicar la técnica de integración por sustitución?
- ¿Cómo prefieren recordarla?

En adelante la usarán como una técnica básica de integración.

ACTIVIDAD 8.2.1.2. Hallen por sustitución la familia de primitivas de las siguientes funciones. Verifiquen los resultados, indicando el dominio de validez.

- $\cos(x/2)$
- $\dfrac{1}{x-2}$
- $x^2\sqrt{x^3+1}$
- $\dfrac{4}{(x-1)^3}$
- $x^3\sqrt{1-x^2}$
- $\dfrac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)^2}$; Sugerencia: propongan $u = \sqrt{x}$.
- $\dfrac{1}{x\ln x}$
- $\dfrac{\ln(2x)}{x}$

ACTIVIDAD 8.2.1.3. Calculen $\int \text{sen}x\,\cos x\,dx$ de dos maneras:

- por sustitución, proponiendo $u(x) = \text{sen}x$

- por sustitución, proponiendo $u(x) = \cos x$

Comparen los resultados. ¿Se verifica que difieren en una constante?

8.2.2 Método de sustitución en integrales definidas y regla de Barrow

El método de sustitución, con la notación que hemos usado, genera primero una primitiva que queda como función de u y que luego debe evaluarse reemplazando $u = u(x)$ para volver a la variable original.

Cuando usamos el método de sustitución para calcular integrales definidas, con la regla de Barrow, podemos ahorrarnos la vuelta a la variable original x escribiendo los límites de integración directamente para la nueva variable u. Informalmente, pueden pensar que en vez de sumar diferenciales de la forma $f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx$ recorridos con la variable x entre a y b vamos a sustituirlos por diferenciales $f(u)\,du$ y recorrerlos con la variable u entre $u(a)$ y $u(b)$.

Dado que la regla de Barrow requiere que el integrando $f(u(x)) \cdot u'(x)$ sea una función continua, hay que ser cuidadosos con las condiciones de validez de este mecanismo. El procedimiento es correcto si se respeta la siguiente regla:

Si la función $u(x)$ tiene derivada continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y la función $f(u)$ es continua en los valores $u(x)$ cuando x recorre el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

Ejemplo 8.2.2.1. Calculemos $\int_0^3 x\left(x^2+1\right)^3 dx$.

El integrando es continuo, y parece apropiado buscar una primitiva por sustitución: proponemos $u = x^2 + 1$, con $du = 2x\,dx$, y resolvemos

$$\int x\left(x^2+1\right)^3 dx = \frac{1}{2}\int u^3\,du = \frac{1}{8}u^4 + C$$

sin reemplazar u en función de x.

Cuando x recorre el intervalo $[0, 1]$ los límites de integración para la variable nueva son $u(0) = 1$ y $u(3) = 10$. Entonces, sin volver a la variable x podemos calcular

$$\int_0^3 x\left(x^2+1\right)^3 dx = \int_1^{10} \frac{1}{2}u^3 du = \frac{1}{8}\left[u^4\right]_1^{10} = \frac{1}{8}(10000-1) = \frac{9999}{8}$$

Para comprobar esta regla práctica pueden usar terminar el cálculo en términos de x, es decir escribir la primitiva $\frac{1}{8}\left(x^2+1\right)^4$, y calcular $\frac{1}{8}\left[\left(x^2+1\right)^4\right]_0^3$. Una vez reemplazados los números, verán que terminan haciendo la misma cuenta.

Actividades

Actividad 8.2.2.1. Calculen las siguientes integrales definidas utilizando el método de sustitución:

1. $\int_0^{5/2} \sqrt{2x+4}\,dx$
2. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,\cos x\,dx$
3. $\int_0^1 \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)^3\,dx$

Actividad 8.2.2.2. En una reacción química, una sustancia A se produce con una velocidad de reacción $R(t) = 2e^{-t}$, expresada en moles por segundo (recuerden que la velocidad de reacción expresa la derivada de la cantidad de moles presentes de la sustancia respecto del tiempo t). El tiempo t se cuenta a partir del inicio de la reacción.

- ¿Qué cantidad infinitesimal de la sustancia A se produce en un diferencial de tiempo dt?
- ¿Qué cantidad de la sustancia A se produce en los primeros 10 segundos?
- ¿Qué cantidad de la sustancia A se produce en los primero 20 segundos? ¿Es el doble que la anterior?

Actividad 8.2.2.3. Una represa costera se llena y se vacía según la altura de la marea. El caudal de llenado/vaciado varía durante el día y se modela con la función

$$Q(t) = Q_m \cos\left[\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right]$$

donde t es la variable tiempo (medida en horas), $t_0 = 6\,h$, T es el período (que vale $T = 24\,h$), Q_m es el caudal máximo (que vale $Q_m = 20\,Ml/h$, donde Ml significa megalitros, es decir 10^6 litros). Por convención, entendemos que cuando el caudal es positivo la represa se está llenando, y cuando es negativo se está vaciando.

- ¿A qué hora del día es máximo el caudal de entrada?
- ¿En qué horario del día hay entrada de agua, y en qué horario hay salida?
- Entre las $6\,h$ y las $12\,h$, ¿aumenta o disminuye la cantidad de agua en la represa? ¿En cuántos megalitros?
- Entre las $18\,h$ y las $24\,h$, ¿aumenta o disminuye la cantidad de agua en la represa? ¿En cuántos megalitros?

8.3 Técnicas para calcular primitivas: integración por partes

Contenidos de esta sección: cálculo de primitivas por partes. Aplicación a la integración definida.

8.3.1 Técnicas de integración: integración por partes

La regla de **integración por partes** se aplica a una gran variedad de productos de funciones, donde aparecen multiplicados dos factores: una función $u(x)$ derivable y una función $v'(x)$ sencilla de antiderivar (la llamamos $v'(x)$ de forma tal que su primitiva se anote $v(x)$). En símbolos, se aplica a integrales que tienen la forma

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx$$

La regla se basa en la siguiente propiedad:

Si $u(x)$ y $v(x)$ son derivables en un intervalo (a, b) y $u'(x) \cdot v(x)$ admite primitiva en (a, b), entonces

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Justificación: esta propiedad se relaciona con la regla de Leibnitz para derivar un producto. Para probar el enunciado basta con derivar el lado derecho usando la regla del producto y el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\begin{aligned} \left(u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx\right)' &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u'(x)v(x) \\ &= u(x)v'(x) \end{aligned}$$

verificando que obtenemos el integrando original $u(x) \cdot v'(x)$. Si podemos resolver la integral $\int u'(x)v(x)\, dx$, entonces $u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx$ es una primitiva de $u(x)v'(x)$.

Esta técnica no resuelve directamente la primitiva, sino que **permite cambiar el cálculo de la primitiva de un producto de funciones por la primitiva de otro producto de funciones**, con la expectativa de que este último resulte más sencillo. En la práctica, se aplica tentativamente y luego se encara el problema de calcular la primitiva de $u'(x) \cdot v(x)$.

Para aplicar la técnica de integración por partes debemos reconocer si nos enfrentamos con la integral de un producto

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx$$

y en ese caso decidir a qué factor llamar $u(x)$ y a qué factor $v'(x)$. Luego,

i) a partir de $u(x)$ calcular $u'(x)$

ii) a partir de $v'(x)$ calcular $v(x) = \int v'(x)\, dx$

iii) escribir

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

y analizar la integral nueva, $\int u'(x) \cdot v(x)\, dx$.

> Una forma usual de recordar la técnica de integración por partes es escribirla en términos de diferenciales: si $u(x)$ y $v(x)$ son dos funciones derivables, podemos escribir
>
> $$d(u \cdot v) = \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)\, dx = v(x)\,\big(u'(x)\, dx\big) + u(x)\,\big(v'(x)\, dx\big) = v \cdot du + u \cdot dv$$
>
> De allí despejamos
>
> $$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

Acumulando estos diferenciales podemos anotar una forma compacta para la técnica de integración por partes:

$$\boxed{\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du}$$

Para usar esta forma de la integral por partes en el cálculo de $\int f(x) \cdot g(x)\,dx$ tenemos que elegir a qué factor llamar u y a qué factor asociar con dx para construir dv. A partir de u escribimos du (derivando) y a partir de dv calculamos v (integrando). Luego encaramos el problema de resolver la nueva integral $\int v\,du$.

En el resto de esta sección vamos a discutir algunos ejemplos y recomendaciones para el uso de esta regla.

Ejemplo 8.3.1.1. Calculemos las primitivas de $f(x) = xe^x$.

Un primer intento nos convence de que no encontramos el resultado en la tabla de integrales básicas, y tampoco la técnica de sustitución se ajusta al producto xe^x. Busquemos entonces la primitiva integrando por partes.

Escribimos la integral indefinida

$$\int x \cdot e^x\,dx$$

reconociendo el producto de dos factores, x y e^x. Elegimos llamar

$$u = x \quad \text{y} \quad dv = e^x\,dx$$

y calculamos

$$\begin{aligned} du &= u'\,dx = dx \\ v &= \int e^x\,dx = e^x \end{aligned}$$

(no hace falta agregar la constante de integración, basta una primitiva de v'). Luego la regla de integración por partes asegura que

$$\begin{aligned} \int x\,e^x\,dx &= uv - \int v\,du \\ &= x\,e^x - \int e^x\,dx \end{aligned}$$

La nueva integral $\int e^x\,dx$ resulta sencilla, consultando la tabla de integrales encontramos sus primitivas $e^x + C$. Reemplazando esta expresión terminamos de calcular las primitivas

$$\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + D$$

donde renombramos $-C = D$ por la costumbre de que la constante de integración aparezca sumada al resultado.

Como siempre, conviene verificar el resultado derivando:

$$(xe^x - e^x + D)' = 1.e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

confirma que hallamos las primitivas correctas y que son válidas en todo el eje real.

El objetivo de la técnica de integración por partes es cambiar el problema original por el cálculo de una primitiva más fácil de resolver. Sin embargo, a veces se puede obtener un problema más complicado que el original. Recién luego de construir el producto $u'(x)v(x)$ podrán estimar si el cálculo de su primitiva es viable, y si vale la pena seguir adelante.

En nuestro ejemplo, si eligiéramos

$$u = e^x \quad \text{y} \quad dv = x\,dx$$

llegaríamos a

$$\int xe^x\,dx = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\int x^2e^x\,dx$$

Observen que esta última integral parece más difícil de resolver que el problema original. Cuando al resolver una integral por partes les sucede esto, es recomendable analizar qué pasa si eligen u y v' de otra manera. Si de todas maneras la integral a resolver queda complicada, habrá que enfrentar el problema con otra estrategia.

Como han notado, tanto la integración por sustitución como la integración por partes nos llevan a plantear nuevas integrales. En muchos casos para resolver estas nuevas integrales necesitamos aplicar nuevamente alguna técnica de integración, sea por sustitución o por partes.

Ejemplo 8.3.1.2. Calculemos las primitivas

$$\int xe^{-2x}\,dx$$

Para integrar por partes proponemos

$$u = x \quad \text{y} \quad dv = e^{-2x}\,dx$$

con lo cual

$$du = dx \quad \text{y} \quad v = \int e^{-2x}\,dx$$

Para calcular v necesitamos resolver $\int e^{-2x}\,dx$, que no resulta inmediata. Esta primitiva se puede calcular por sustitución, llamando $t = -2x$ (usamos una nueva letra t, porque sería confuso usar la misma letra u con distintos significados) . El diferencial de t resulta $dt = -2\,dx$, con lo cual

$$\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^{-2x}(-2\,dx) = -\frac{1}{2}\int e^t\,dt = -\frac{1}{2}e^t = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

es decir, $v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$.

Volviendo a la integral por partes, tenemos que

$$\begin{aligned}\int xe^{-2x}\,dx &= uv - \int vdu \\ &= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx\end{aligned}$$

La última integral es la misma que enfrentamos para calcular v, ya la resolvimos por sustitución como $\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}$. Reemplazando,

$$\int xe^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$$

Como siempre, verifiquen que el resultado es correcto derivando respecto de x.

Pueden encontrar juegos curiosos al integrar por partes. En este ejemplo pueden ver cómo se halla una primitiva "sin resolverla":

Ejemplo 8.3.1.3. Intentemos calcular una primitiva del producto $e^x \text{sen} x$.

Dado que esta función no se encuentra en la tabla de integrales básicas, y que la técnica de sustitución no es adecuada, intentemos integrar por partes. Llamemos

$$u = \text{sen} x \quad \text{y} \quad dv = e^x\,dx$$

con lo cual

$$du = \cos x\,dx \quad \text{y} \quad v = e^x$$

Aplicando la técnica de integral por partes encontramos que

$$\int \text{sen}x \cdot e^x \, dx = \text{sen}x \cdot e^x - \int e^x \cos x \, dx$$

La integral $\int e^x \cos x \, dx$ que aparece es similar a la original (ni más sencilla ni más complicada). Vamos a intentar nuevamente resolverla por partes. Llamemos ahora

$$\tilde{u} = \cos x \quad \text{y} \quad d\tilde{v} = e^x \, dx$$

(usamos tildes para no repetir los nombres) con lo cual

$$d\tilde{u} = \text{-sen}x \, dx \quad \text{y} \quad \tilde{v} = e^x$$

Aplicando nuevamente la técnica de integral por partes encontramos que

$$\int \text{sen}x \cdot e^x \, dx \quad = \quad \text{sen}x \cdot e^x - \left(\cos x \cdot e^x + \int \text{sen}x \cdot e^x \, dx \right)$$

es decir

$$\int \text{sen}x \cdot e^x \, dx = e^x \left(\text{sen}x - \cos x \right) - \int \text{sen}x \cdot e^x \, dx$$

Lo curioso en esta expresión es que aparece en el lado derecho la misma integral que queremos calcular. Sin haberla "resuelto", podemos pasarla al lado izquierdo

$$2 \int \text{sen}x \cdot e^x \, dx = e^x \left(\text{sen}x - \cos x \right)$$

y despejar el resultado

$$\int \text{sen}x \cdot e^x \, dx = \frac{1}{2} e^x \left(\text{sen}x - \cos x \right)$$

Esta primitiva es correcta, como se puede verificar derivando respecto de x. Las demás primitivas se obtienen sumando una constante de integración,

$$\int \text{sen}x \cdot e^x \, dx = \frac{1}{2} e^x \left(\text{sen}x - \cos x \right) + C$$

Actividades

ACTIVIDAD 8.3.1.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes preguntas:

- ¿En qué casos es indicado aplicar la técnica de integración por partes?
- ¿Cómo prefieren recordarla?

En adelante la usarán como una técnica básica de integración.

ACTIVIDAD 8.3.1.2. Integrando por partes, encuentren las primitivas de las siguientes funciones:

- $f(x) = x \, \text{sen}x$
- $g(x) = x \, \ln x$
- $h(x) = \ln x$ en el intervalo $(0, +\infty)$
- $m(x) = x^2 e^x$ Sugerencia: tendrán que aplicar la técnica dos veces
- $n(x) = e^x \cos x$
- $p(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
- $q(x) = x^2 \cos x$
- $r(x) = x^2 \ln^2(x)$

ACTIVIDAD 8.3.1.3. Hallen las siguientes primitivas, indicando el dominio de validez de sus resultados:

- $\int t \ln (t + 1) \; dt$

- $\int x \cos(x+\pi)\, dx$
- $\int x^2 \ln(4x)\, dx$

ACTIVIDAD 8.3.1.4. Hallen una primitiva para cada una de las siguientes funciones (en algunas pueden necesitar usar más de un método):

- $x\,\text{sen}\,(2x)$
- $x^5 \mathrm{e}^{x^3}$
- $x \ln(x^2+1)$

8.3.2 Integración por partes y regla de Barrow

Al escribir una primitiva por partes, con la regla $\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)$, se puede decir que el primer término "ya está integrado", y que el segundo "aún se debe integrar".

Cuando el objetivo es calcular una integral definida utilizando la técnica de integración por partes, aconsejamos terminar primero de construir la primitiva (sin límites de integración) y luego usarla para aplicar la regla de Barrow. Pero si quieren ir aplicando la regla de Barrow durante la integración por partes, tienen que anotar que el término que ya está integrado se debe evaluar en los límites de integración, y que el segundo término se deja con los límites indicados hasta que se halle su primitiva: la forma correcta de anotarlo el procedimiento es

$$\int_a^b u(x)v'(x)\, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\, dx$$

EJEMPLO 8.3.2.1. Siguiendo con el ejemplo 8.3.1.1, calculemos la integral definida $\int_0^1 xe^x\, dx$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x\, dx &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1.e^x\, dx \\ &= (e-0) - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1 \end{aligned}$$

ACTIVIDAD 8.3.2.1. Calculen las siguientes integrales definidas:

- $\int_1^{\mathrm{e}} t \ln t\, dt$
- $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\, dx$
- $\int_1^2 x \ln(x^2)\, dx$

Actividade

Actividades

ACTIVIDAD 8.3.2.2. El ratón de la actividad 4.3.1.2 corre en una rueda quemando calorías a un ritmo dado por

$$\frac{dQ}{dt} = A\, te^{-t/T}$$

donde $A = \dfrac{1}{20}\, cal/min^2$ y $T = 20\, min$. Calculen:

- Las calorías quemadas por el ratón en los primeros 10 minutos de carrera.
- Las calorías quemadas por el ratón entre los 10 minutos y los 20 minutos de carrera.
- Las calorías quemadas por el ratón en función del tiempo t.

Pueden trabajar sin unidades durante el cálculo, pero es importante dar el resultado con las unidades correctas.

8.4 Recomendaciones para buscar primitivas

Contenidos de esta sección: expresiones equivalentes para el integrando: reescribir antes de integrar. Descomposición de funciones racionales en fracciones simples. Identidades útiles para reescribir funciones trigonométricas. Sustituciones trigonométricas e hiperbólicas.

8.4.1 Reescribir antes de integrar

La búsqueda de primitivas es la parte más trabajosa del cálculo de integrales. Esto se debe a que no tenemos una tabla con las primitivas de cualquier función, ni propiedades que permitan integrar todos los productos, cocientes o funciones compuestas construidos con funciones básicas.

Cuando busquemos una primitiva, y no encontremos su expresión en los primeros intentos (tabla, por sustitución, por partes), nos queda la posibilidad de **reescribir el integrando** como una expresión matemática equivalente, buscando una forma que sí permita aplicar una regla.

EJEMPLO 8.4.1.1. Veamos un ejemplo algebraico. La primitiva

$$\int \frac{2x - x^3}{\sqrt{x}}\, dx$$

parece difícil de encontrar. Pero si, **antes de intentar integrar**, reescribimos el integrando distribuyendo la resta y usando exponentes fraccionarios en la forma

$$\frac{2x - x^3}{\sqrt{x}} = 2x^{1/2} - x^{5/2}$$

entonces tenemos que calcular la primitiva de una suma de términos que podemos resolver por tabla:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x - x^3}{\sqrt{x}}\, dx &= 2\int x^{1/2} dx - \int x^{5/2} dx \\ &= \frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{2}{7}x^{7/2} + C \end{aligned}$$

Para reescribir un integrando, en general, tienen que estar entrenados en casos de factorización, simplificación, y todo tipo de manipulación algebraica. Por otro lado, cuando encuentren funciones trigonométricas, hiperbólicas, exponenciales o logaritmos, necesitarán recordar sus propiedades y algunas identidades útiles. Con práctica, podrán identificar distintos tipos de integrando y reconocer las técnicas recomendadas para reescribirlos.

En esta sección presentamos:

- una técnica algebraica para reescribir cocientes de polinomios, llamada descomposición en fracciones simples (o fracciones parciales)
- recomendaciones para reescribir funciones trigonométricas
- recomendaciones para integrar expresiones con raíces cuadradas, proponiendo algunas sustituciones trigonométricas

Nuestro objetivo es que discutan estas técnicas y reconozcan su utilidad. Cuando necesiten resolver integrales similares, podrán usar esta sección como material de consulta.

Actividades

ACTIVIDAD 8.4.1.1. Para fijar ideas, reescriban el integrando y calculen las siguientes integrales:

- $\int \frac{x-5}{x}\, dx$

- $\int (x+2)(x-3)(x+1)\ dx$
- $\int \left(\text{sen}^2 x + \cos^2 x\right)\ dx$

8.4.2 Reescribir antes de integrar: primitivas de funciones racionales

Una función racional es un cociente de polinomios, de la forma

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas (y $q(x)$ no es el polinomio nulo). Algunos resultados de Álgebra permiten descomponer un cociente de polinomios como suma de un polinomio y varios cocientes más sencillos, de forma tal que todos se puedan integrar.

Si el grado de $p(x)$ es mayor o igual que el grado del denominador $q(x)$, el primer paso es hacer la división de polinomios:

$$\begin{array}{rl} p(x) & \underline{|\ q(x)} \\ \cdots & \quad c(x) \\ r(x) & \end{array}$$

y escribir $p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$. Entonces,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{q(x) \cdot c(x) + r(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

La integral del polinomio $c(x)$ es sencilla, y queda ocuparnos de la integral del cociente $r(x)/q(x)$, donde el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $q(x)$.

Ejemplo 8.4.2.1. Dada $f(x) = \dfrac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}$, realicen la división de los polinomios para escribir

$$2x^3 - 4x^2 - x - 3 = 2x\left(x^2 - 2x - 3\right) + (5x - 3)$$

Entonces

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2x\left(x^2 - 2x - 3\right) + (5x - 3)}{x^2 - 2x - 3} = 2x + \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

Descomposición en fracciones simples

La **descomposición en fracciones simples** es una técnica algebraica que permite descomponer cualquier cociente de polinomios $r(x)/q(x)$, con el grado de $r(x)$ menor que el grado de $q(x)$, como suma de términos de la forma

$$\frac{A}{x - x_0},\ \frac{A_k}{(x - x_0)^k},\ \frac{Bx + C}{x^2 + bx + c},\ \text{o}\ \frac{B_k x + C_k}{(x^2 + bx + c)^k}$$

La presencia de cada uno de estos términos depende de la factorización del denominador $q(x)$, en tanto que los coeficientes que escribimos con mayúsculas son incógnitas ajustables que deben calcularse en cada caso.

Según el Teorema Fundamental del Álgebra, todo polinomio de coeficientes reales se puede factorizar como producto de dos tipos de factores mónicos irreducibles en $\mathbb{R}$: factores lineales de la forma $x - x_0$ y factores cuadráticos de la forma $x^2 + bx + c$ con discriminante $b^2 - 4c$ negativo (es decir, sin raíces reales). Por ejemplo,

$$2x^5 + 10x^4 + 16x^3 + 4x^2 - 16x - 16 = 2(x-1)(x+2)^2(x^2 + 2x + 2)$$

Los distintos factores pueden ser simples (que aparecen una sola vez, como $(x-1)$) y (x^2+2x+2), o repetidos con cierta multiplicidad (como $(x+2)^2$, repetido con multiplicidad 2).

Por cada factor presente en el denominador $q(x)$, repetido o no, aparecen determinados términos en la descomposición de $r(x)/q(x)$:

- Caso 1: cuando en el denominador aparece un factor lineal $(x - x_0)$, no repetido, se incluye una fracción simple
$$\frac{A}{x - x_0}$$
- Caso 2:cuando en el denominador aparece un factor lineal $(x - x_0)^m$ repetido m veces, con $m \geq 2$, se incluyen fracciones $A_k/(x - a)^k$ hasta llegar al grado $k = m$. Por ejemplo, si el denominador contiene $(x - x_0)^3$, se propone
$$\frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{(x - x_0)^2} + \frac{A_3}{(x - x_0)^3}$$
- Caso 3: cuando en el denominador aparece un factor cuadrático sin raíces reales, de la forma (x^2+bx^2+c) con $b^2 - 4c < 0$, y no está repetido, se incluye una fracción
$$\frac{Bx + C}{x^2 + bx^2 + c}$$
- Caso 4: cuando en el denominador aparece un factor cuadrático sin raíces reales repetido m veces, en la forma $(x^2 + bx^2 + c)^m$ con $b^2 - 4c < 0$, se incluyen fracciones $(B_k + C_k x)/(x^2 + bx^2 + c)^k$, hasta llegar al exponente $k = m$. Por ejemplo, si aparece $(x^2 + 2x + 2)^2$ se propone
$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

En resumen, para descomponer en fracciones simples un cociente de polinomios $r(x)/q(x)$ (con el grado de $r(x)$ menor que el grado de $q(x)$) se deben seguir los siguientes pasos:

$i)$ factorizar el denominador en factores irreducibles en $\mathbb{R}$,

$ii)$ proponer la descomposición en fracciones simples, según los factores hallados en el denominador,

$iii)$ hallar los coeficientes de las fracciones simples, igualando el cociente $r(x)/q(x)$ con la descomposición propuesta.

Ejemplo 8.4.2.2. Calculemos una primitiva para la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ mediante una descomposición en fracciones simples.

Como el denominador $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ es un producto de dos factores lineales simples (no repetidos), según el caso 1 corresponde proponer dos fracciones simples
$$\frac{1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$
Algunos teoremas de Álgebra aseguran que existen coeficientes A y B que resuelven esta igualdad. Para encontrarlos resolvemos la suma de fracciones
$$\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{(A + B)x + (A - B)}{(x - 1)(x + 1)},$$
y la igualamos al cociente original
$$\frac{(A + B)x + (A - B)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{0 \cdot x + 1}{(x - 1)(x + 1)}$$
(completando con coeficientes 0 si es necesario). Como el denominador es el mismo, deben ser iguales los numeradores. La igualdad de polinomios significa la igualdad de los coeficientes de cada potencia de x, por lo que planteamos un sistema de dos ecuaciones lineales para hallar A y B:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases}$$

Hay varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales (por sustitución, por igualación, por determinantes, por sumas y restas, por reducción de Gauss-Jordan, etc.), asegúrense de poder trabajar con alguno de ellos. Para este sistema hallarán la solución $A = 1/2$, $B = -1/2$. Reemplazando, la descomposición en fracciones simples resulta

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}$$

Una vez descompuesta en fracciones simples es sencillo de "término a término":

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \left(\frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

Noten que el integrando no es continuo en $x = -1$ ni en $x = 1$, por lo que la primitiva hallada es válida por intervalos, en $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ o $(1, +\infty)$. Usando propiedades del logaritmo, también pueden escribir las primitivas como

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln|\frac{x-1}{x+1}| + C$$

Observen que la técnica de descomposición en fracciones simples es puramente algebraica. Si la usamos para integrar una función racional, conviene hacer aparte la descomposición del integrando; una vez hecha, volvemos a plantear las integrales.

Ejemplo 8.4.2.3. Calculemos

$$\int \frac{1}{x^3-2x^2+x} \, dx$$

Factorizamos el denominador como $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$; esta factorización contiene un factor lineal x simple y un factor lineal $x - 1$ repetido dos veces. Según los casos 1 y 2 corresponde proponer tres fracciones simples

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Desarrollando la suma de fracciones obtenemos

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{(A+B)\,x^2 + (-2A-B+C)\,x + A}{x(x-1)^2}$$

Igualando esta expresión con el cociente original, se observa que

$$\begin{cases} A+B & =0 \\ -2A-B+C & =0 \\ A & =1 \end{cases}$$

Este sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas tiene solución única, $A = 1$, $B = -1$ y $C = 1$. La descomposición resulta

$$\frac{1}{x^3-2x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Podemos integrar término a término esta función,

$$\int \frac{1}{x^3-2x^2+x} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

Como el integrando no es continuo en $x = 0, 1$, la primitiva hallada es válida en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ o $(1, +\infty)$.

EJEMPLO 8.4.2.4. ¿Qué ocurre cuando el polinomio tiene un factor cuadrático sin raíces reales? Calculemos la primitiva de $\dfrac{1}{x^3+4x}$.

Observamos que el denominador se factoriza como $x^3+4x = x(x^2+4)$ y que el factor cuadrático x^2+4 no se puede seguir factorizando en los reales. Según los casos 1 y 3, la descomposición adecuada es

$$\frac{1}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

donde la segunda fracción es la propuesta asociada al factor irreducible (x^2+4).

Debemos resolver la suma de fracciones, igualar numeradores y resolver el sistema de ecuaciones para las incógnitas A, B y C. En este caso deben encontrar que $A = 1/4$, $B = -1/4$ y $C = 0$. Separando las integrales obtendrán que la primitiva es

$$\int \frac{1}{x^3+4x} dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\, dx - \frac{1}{4}\int \frac{x}{x^2+4}\, dx = \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{8}\ln(x^2+4) + C$$

válida en $(-\infty, 0)$ o en $(0, +\infty)$.

Actividades

ACTIVIDAD 8.4.2.1. Hallen las primitivas de las siguientes funciones utilizando la descomposición en fracciones simples. Atendiendo a los ceros de los denominadores, indiquen los intervalos donde esas primitivas son válidas.

- $\dfrac{1}{x(x^2+1)}$
- $\dfrac{x}{x^4-1}$
- $\dfrac{3}{x^2-x-2}$
- $\dfrac{x^3-x}{x^2-x-2}$
- $\dfrac{x^2+4}{x^3-4x}$
- $\dfrac{1}{x^3-x^2}$

GEOGEBRA 8.4.2.2. GeoGebra está preparado para descomponer expresiones racionales en fracciones simples. Definan una función $f(x)$ racional y prueben el comando

```
FraccionesParciales[f]
```

8.4.3 Reescribir antes de integrar: integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas

Las integrales de sen$x$ y de $\cos x$ se encuentran en la tabla básica de primitivas. Sin embargo, las potencias de senos y cosenos no son sencillas de integrar directamente; en algunos casos es adecuado usar identidades trigonométricas para reescribirlas antes de integrar.

Existen muchas identidades entre funciones trigonométricas, y no es necesario recordarlas todas. Sí es importante reconocer cuáles son las más útiles, y tenerlas a mano. Para los casos que vamos a plantear resultan útiles la identidad pitagórica

$$\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$$

y la expresión del coseno del doble de un ángulo

$$\cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos(2x)$$

Sumando las igualdades anteriores término a término se obtiene

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

y restando término a término se obtiene

$$\text{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Estos resultados permiten reescribir potencias (cuadrados) de senos y cosenos en una forma que no incluye potencias.

EJEMPLO 8.4.3.1. Usando estos resultados podemos resolver

$$\int \text{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos(2x))\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\text{sen}(2x) + C$$

y

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos(2x))\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\text{sen}(2x) + C$$

Para hallar primitivas de potencias más altas de senos o cosenos (o productos de ambas), podemos usar las identidades anteriores repetidas veces. Corresponden recomendaciones distintas según se trate de potencias pares o de potencias impares, como hacemos en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 8.4.3.2. Para hallar las primitivas

$$\int \text{sen}^3 x\, dx$$

conviene reescribir

$$\text{sen}^3 x = \text{sen}^2 x \cdot \text{sen} x = \left(1-\cos^2 x\right)\text{sen} x$$

Ahora la integral se resuelve con métodos básicos de integración: primero usamos la linealidad para separar una suma de integrales

$$\int \text{sen}^3 x\, dx = \int \text{sen} x\, dx - \int \cos^2 x \cdot \text{sen} x\, dx$$

y en la segunda proponemos la sustitución $u = \cos x$, con $du = -\text{sen} x\, dx$, de modo que

$$-\int \cos^2 x \cdot \text{sen} x\, dx = \int u^2\, du = \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

Finalmente,

$$\int \text{sen}^3 x\, dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

Como siempre, deberían verificar esta primitiva derivando el resultado; necesitarán algunas identidades trigonométricas para escribir la derivada en la forma original $\text{sen}^3 x$.

EJEMPLO 8.4.3.3. Para hallar las primitivas

$$\int \text{sen}^4 x\, dx$$

conviene reescribir

$$\text{sen}^4 x = \text{sen}^2 x \cdot \text{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \cdot \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right)$$

En el último término encontramos un coseno al cuadrado; conviene a su vez reescribirlo como

$$\cos^2(2x) = \frac{1+\cos(2\cdot 2x)}{2}$$

Reemplazando en la expresión anterior reescribimos

$$\text{sen}^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$$

Las primitivas de $\text{sen}^4 x$ se pueden hallar ahora por sustitución,

$$\int \text{sen}^4 x\, dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\text{sen}(2x) + \frac{1}{32}\text{sen}(4x) + C$$

Las funciones hiperbólicas tienen propiedades e identidades análogas a las que hemos utilizado en el caso trigonométrico. Ellas son

$$\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1$$

y

$$\cosh^2 x + \text{senh}^2 x = \cosh(2x)$$

Sumándolas término a término se obtiene

$$\cosh^2 x = \frac{1+\cosh(2x)}{2}$$

y restando término a término se obtiene

$$\text{senh}^2 x = \frac{\cosh(2x)-1}{2}$$

Estos resultados, como en el caso trigonométrico, permiten reescribir potencias (cuadrados) de senos hiperbólicos y cosenos hiperbólicos en una forma que no incluye potencias.

Actividades

ACTIVIDAD 8.4.3.1. Resuelvan las siguientes integrales con potencias impares de senos y cosenos:

- $\int \cos^3 x\, dx$
- $\int \cos^3 x\,\text{sen}^4 x\, dx$
- $\int \text{sen}^5 x\, dx$

ACTIVIDAD 8.4.3.2. Resuelvan las siguientes integrales con potencias pares de senos y cosenos

- $\int \cos^4 x\, dx$
- $\int \text{sen}^2 x.\cos^4 x\ dx$

ACTIVIDAD 8.4.3.3. Calculen el valor medio de las funciones $\text{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

ACTIVIDAD 8.4.3.4. Las siguientes integrales se pueden resolver de dos maneras: reescribiendo seno y coseno hiperbólico en términos de exponenciales (recuerden las definiciones en el capítulo 1), o reescribiendo potencias seno y coseno hiperbólico mediante identidades. Intenten de las dos maneras:

- $\int \text{senh}^2 x\, dx$
- $\int \cosh^2 x\, dx$

ACTIVIDAD 8.4.3.5. Utilizando la identidad fundamental $\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1$ y sustituciones adecuadas encuentren las primitivas de los siguientes productos de senos y cosenos hiperbólicos.

- $\int \text{senh}^3 x\, dx$
- $\int \cosh^3 x . \text{senh}^2 x \; dx$

8.4.4 Reescribir al integrar: sustituciones trigonométricas e hiperbólicas

La identidad pitagórica $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$ y la correspondiente identidad hiperbólica $\text{cosh}^2 x - \text{senh}^2 x = 1$ resultan útiles, sorprendentemente, en integrales de funciones puramente algebraicas. Veamos un ejemplo:

EJEMPLO 8.4.4.1. Calculemos la integral

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx$$

en el intervalo $[-1,1]$. Exploren las distintas técnicas vistas, creemos que no van a encontrar una expresión para la primitiva.

Aunque les parezca descabellado, vamos a proponer una sustitución $x = \text{sen} u$, con $dx = \cos u\, du$. En esta sustitución no hemos llamado $u(x)$ a cierta función de x que aparece dentro de una función compuesta, como es usual, sino que proponemos reescribir x como cierta función de una nueva variable u. La propuesta toma la forma usual si $x(u)$ es biyectiva y podemos escribir la función inversa $u(x)$; en este ejemplo, efectivamente, con las restricciones $x \in [-1,1]$ y $u \in [-\pi/2, \pi/2]$ podemos invertir $x(u) = \text{sen} u$ como $u(x) = \text{arcsen} x$. De todas maneras, el integrando no contiene ninguna expresión con arcsen$x$.

Por sustitución, entonces, reemplazamos $x = \text{sen} u$ y $dx = \cos u\, du$:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \sqrt{1-\text{sen}^2 u}\, \cos u\, du$$

Aquí entra en juego la trigonometría: $\sqrt{1-\text{sen}^2 u} = \sqrt{\cos^2 u} = \cos u$ (que representa bien la raíz positiva porque $\cos u \geq 0$ en $[-\pi/2, \pi/2]$), con lo cual podemos integrar fácilmente

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}\int (1+\cos(2u))\, du = \frac{u}{2} + \frac{1}{4}\text{sen}(2u) + C$$

Volviendo a la variable original,

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\text{arcsen} x}{2} + \frac{1}{4}\text{sen}(2\text{arcsen} x) + C$$

Quizás no sea un resultado bonito, pero hemos podido calcular las primitivas en forma cerrada, es decir en términos de funciones conocidas. Como comentamos en el ejemplo 8.4.5.1, no hubiéramos podido resolver esta primitiva si no estudiábamos antes funciones inversas.

La sustitución que utilizamos en el ejemplo 8.4.4.1 no es nada evidente, pero resultó útil para construir las primitivas de una función relativamente sencilla como $\sqrt{1-x^2}$. Conviene reconocer la forma de algunas integrales donde son útiles sustituciones de este tipo. Se las llama **sustituciones trigonométricas** y tienen análogas **sustituciones hiperbólicas**:

- Para integrales que contienen la variable x en la forma $\sqrt{1-x^2}$, como en el ejemplo, prueben la sustitución $x = \operatorname{sen} u$. Entonces, usando identidades trigonométricas, resulta

$$\sqrt{1-x^2} = \cos u \quad \text{y} \quad dx = \cos u \, du$$

(siempre que mantengan $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, para que $\cos u \geq 0$). En estos casos, si lo prefieren, también funciona la sustitución $x = \cos u$.
- Para integrales que contienen la variable x en la forma $\sqrt{1+x^2}$, prueben la sustitución $x = \operatorname{senh} u$. Entonces, usando identidades hiperbólicas, resulta

$$\sqrt{1+x^2} = \cosh u \quad \text{y} \quad dx = \cosh u \, du$$

- Para integrales que contienen la variable x en la forma $\sqrt{x^2-1}$, con $x \geq 1$, prueben la sustitución $x = \cosh u$. Entonces, usando identidades hiperbólicas, resulta

$$\sqrt{x^2-1} = \operatorname{senh} u \quad \text{y} \quad dx = \operatorname{senh} u \, du$$

(siempre que mantengan $u \geq 0$ para asegurar que $\operatorname{senh} u \geq 0$ representa bien la raíz positiva $\sqrt{x^2-1}$).
- Para integrales que contienen la variable x en la forma $\sqrt{ax^2+bx+c}$ pueden completar cuadrados y proponer una sustitución adecuada para llegar a alguno de los casos anteriores.

Luego de estas sustituciones, quedarán por resolver integrales trigonométricas (como las de la sección anterior) o integrales hiperbólicas (similares a las trigonométricas). Para ilustrar el último punto pueden revisar otro ejemplo:

EJEMPLO 8.4.4.2. Calculemos

$$\int \sqrt{2x^2-4x-2},\, dx$$

Reconocemos que el integrando contiene la raíz cuadrada $\sqrt{2x^2-4x-2}$, y reescribimos completando cuadrados dentro de la raíz,

$$\sqrt{2x^2-4x-2} = \sqrt{2\left(x^2-2x-1\right)} = \sqrt{2\left(x^2-2x+1-2\right)} = \sqrt{2\left(x-1\right)^2-4}$$

Esta expresión tiene el aspecto de $\sqrt{v^2-1}$, como en el tercer caso de la lista de recomendaciones. Para terminar de darle esa forma tenemos que "fabricar el 1":

$$\sqrt{2\left(x-1\right)^2-4} = \sqrt{4\left[\frac{\left(x-1\right)^2}{2}-1\right]} = 2\sqrt{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2-1}$$

donde reconocemos la forma $\sqrt{v^2-1}$ si proponemos la sustitución $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)$, con $dv = \frac{1}{\sqrt{2}}\, dx$.

Con esta preparación algebraica, volvemos a la integral

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x^2-4x-2}\, dx &= \int 2\sqrt{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2-1}\, dx \\ &= 2\sqrt{2}\int \sqrt{v^2-1}\, dv\end{aligned}$$

Ahora seguimos la recomendación y proponemos $v = \cosh u$, con $dv = \text{senh} u\, du$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{v^2-1}\, dv &= \int \sqrt{\cosh^2 u - 1} \text{senh} u\, du \\ &= \int \text{senh}^2 u\, du \\ &= \int \frac{\cosh(2u)-1}{2}\, du \\ &= \frac{1}{4}\text{senh}(2u) - \frac{1}{2}u + C\end{aligned}$$

donde usamos las identidades hiperbólicas mencionadas en la sección anterior y una sustitución $t = 2u$. Armemos el resultado de este ejercicio:

$$\int \sqrt{2x^2-4x-2}\, dx = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\text{senh}(2u) - \frac{1}{2}u + C\right)$$

donde reemplazamos $u = \text{argcosh} v$,

$$\int \sqrt{2x^2-4x-2}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\text{senh}(2\text{argcosh} v) - \sqrt{2}\text{argcosh} v + D$$

y finalmente $v = \frac{x-1}{\sqrt{2}}$, para obtener

$$\int \sqrt{2x^2-4x-2}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\text{senh}\left[2\text{argcosh}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)\right] - \frac{1}{2}\text{argcosh}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + D$$

Este desarrollo es bastante elaborado, esperamos que les sirva para reconocer que resolver integrales puede ser un trabajo arduo. Sin embargo no hemos hecho más que seguir una recomendación, aplicar sustituciones y usar algunas de las funciones especiales del Capítulo 1.

Pueden encontrar otras sustituciones interesantes, similares a las presentadas. En cada caso la sustitución propuesta $x(u)$ involucra un dominio y un codominio donde debe ser biyectiva, para poder construir la inversa $u(x)$. Tengan cuidado también con el dominio de las funciones que van a integrar: tanto la función original de x como el integrando que resulta función de u deben estar bien definidos en los intervalos de trabajo. Y recomendamos, como siempre, verificar que la primitiva hallada sea correcta derivando el resultado.

Actividades

ACTIVIDAD 8.4.4.1. Resuelvan las siguientes integrales. Indiquen el dominio del integrando, y verifiquen que las primitivas halladas sean válidas en ese dominio.

- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$
- $\int \sqrt{x^2-2x}\, dx$
- $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$
- $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\, dx$

8.4.5 A pesar de todo, algunas integrales no se pueden calcular

Para ser honestos, y a pesar del esfuerzo que hagamos para encontrar una expresión para una función primitiva, en algunos casos se sabe que no podremos lograrlo. Si bien el Teorema Fundamental del Cálculo muestra que cualquier función $f(x)$ continua en un intervalo tiene primitiva en ese intervalo, y la expresa como una función integral, no indica cómo resolverla. Existen funciones sencillas cuya primitiva no se puede expresar en "forma cerrada", es decir en términos de funciones conocidas. Les acercamos dos ejemplos como advertencia.

EJEMPLO 8.4.5.1. Hagamos un ejemplo imaginario: supongan que aún no han estudiado las funciones trigonométricas inversas, y deben encontrar la familia de primitivas de una sencilla función racional como

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Aunque intentaran de resolver estas primitivas por la tabla de la sección 3.4.1 (excluyendo los últimos renglones de funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas), o por sustitución, o por partes, no conseguirían un resultado cerrado. Uno podría concluir que no existe un resultado cerrado para estas primitivas.

Solamente después de estudiar la función arco tangente y su derivada, podemos expresar el resultado como

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{arctan} x + C$$

EJEMPLO 8.4.5.2. Consideren un ejemplo más realista: buscar una primitiva de $f(x) = e^{x^2}$. Dicha primitiva existe, como función integral, en todo el eje real porque $f(x)$ es una función continua en todo el eje real: el Teorema Fundamental del Cálculo asegura que la función integral

$$F_0(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$$

es una función derivable, y que su derivada es e^{-x^2}. Sin embargo, se sabe que esta primitiva no se puede expresar en términos de funciones conocidas.

Este no es un ejemplo cualquiera: la integral $\int_0^x e^{-u^2} du$ aparece en muchos modelos de la ciencia. Es tan importante que se le da un nombre, y figura en calculadoras y programas de computación. Comentaremos esto en el capítulo de aplicaciones del Cálculo Integral.

CAPÍTULO 9
Aplicaciones y extensiones del cálculo integral

Contenidos del capítulo: cálculo de algunas cantidades acumuladas: áreas, longitudes, volúmenes, trabajo y energía. Funciones integrales, definición formal del logaritmo natural y función error. Integración de ecuaciones diferenciales por separación de variables. Modelos de comportamiento exponencial. Integrales impropias: noción de convergencia, comportamiento asintótico y criterios de convergencia.

9.1 Planteo del cálculo de cantidades acumuladas

Contenidos de esta sección: ejemplos de cálculo de cantidades acumuladas en Geometría: longitud de una curva, área entre dos curvas, volumen de sólidos de revolución. Ejemplos de cálculos aplicados en Química y Física.

La integral definida, como vimos en el Capítulo 7, se usa en todo tipo de cálculos donde se describa un proceso de acumulación. En aquel capítulo planteamos el cálculo del volumen de líquido que sale de una tubería cuando el caudal no es constante. Otros ejemplos podrían ser la cantidad de cierta sustancia producida en una reacción química con velocidad de reacción variable, la distancia recorrida por un vehículo mientras acelera, la cantidad de radiación acumulada en la piel a lo largo de un día de sol, etcétera.

Para plantear este tipo de situaciones con toda generalidad, podemos hablar de un proceso que se desarrolla siguiendo el recorrido de una variable x en cierto rango, digamos entre a y b, y de una cantidad F que se va acumulando cada vez que x realiza un incremento infinitesimal dx. Si en cada paso dx del proceso la cantidad infinitesimal dF acumulada se puede estimar (localmente) como proporcional al incremento dx, es decir

$$dF = f(x)\,dx$$

entonces el total acumulado se calcula como la integral definida

$$F = \int_a^b f(x)\,dx$$

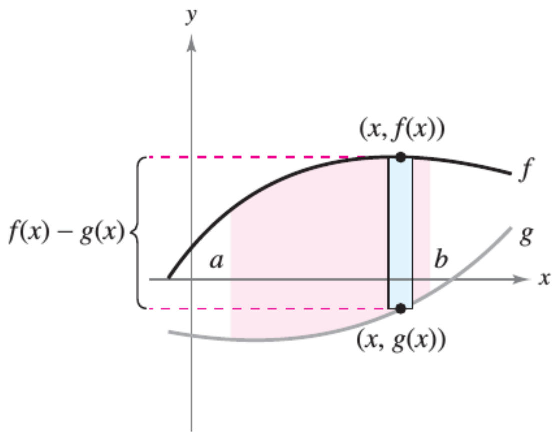
Vamos a describir varios planteos que conducen al cálculo de integrales y proponerles que los resuelvan. Los primeros se refieren a objetos matemáticos, y luego discutiremos algunos cálculos que harán pronto en otras materias.

El objetivo de esta sección 9.1 es que reconozcan y afiancen el **mecanismo de planteo** de los problemas que se resuelven con integrales: primero identificar el proceso y la variable que guía su desarrollo, luego construir la cantidad diferencial acumulada en intervalos infinitesimales y finalmente integrarla.

9.1.1 Cálculo de la superficie encerrada entre dos curvas

Consideremos la gráfica de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ en un intervalo del eje x, donde $f(x) \geq g(x)$. Nos interesa calcular el área A encerrada entre las dos curvas (se podría decir que $g(x)$ describe el "piso" y que

$f(x)$ describe el "techo" de la región) y las rectas verticales que pasan por los bordes del intervalo ("paredes" de la región).



Para calcular el área vamos a hacer un recorrido del eje horizontal, desde a hasta b. La variable que hace el recorrido es x, y cada vez que se realiza un incremento dx se barre un área rectangular infinitesimal base dx y de altura $f(x)-g(x)$ (es decir, la distancia entre el piso y el techo de la región). Deben reconocer este rectángulo infinitesimal en la figura.

Si llamamos A al área que queremos calcular, podemos escribir que a una base de longitud infinitesimal dx le corresponde un área infinitesimal

$$dA = (f(x) - g(x))\, dx$$

Para calcular el área total tenemos que sumar estas contribuciones en forma de integral definida:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

> Ejemplo 9.1.1.1. En esta sección los ejemplos los resuelven ustedes. En cada uno les proponemos una aplicación concreta del planteo que acabamos de desarrollar.
>
> Consigna: calculen el área de la región encerrada por las gráficas de $y = x^2 + 2$, $y = -x$, entre $x = 0$ y $x = 1$.
>
> Sugerencia: para organizar el cálculo les sugerimos graficar e identificar tanto el intervalo de integración como las funciones que hacen de "piso" y "techo" del área encerrada.
>
> Control: comparen su resultado con la cantidad de cuadrados de lado 1 que cubre la gráfica de la región.

Actividades

Actividad 9.1.1.1. Encuentren el área de la región encerrada por las gráficas de las parábolas $y = 2x^2$ e $y = 12 - x^2$. En este caso, además de graficar y reconocer las funciones que hacen de "piso" y "techo", deberán encontrar los puntos de intersección entre las curvas para ubicar los límites de integración.

Actividad 9.1.1.2. Estamos en condiciones de demostrar un resultado fundamental de la Geometría: la fórmula que da la superficie de un círculo de radio R.

La ecuación de la circunferencia de radio R con centro en el origen es $x^2 + y^2 = R^2$. De allí podemos despejar $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ para representar la semi-circunferencia superior, y también $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ para representar la semi-circunferencia inferior. Calculen ustedes, con la integral apropiada, el área encerrada dentro de la circunferencia de radio R. Si sale todo bien, van a obtener

$$\text{Área del círculo } = \pi R^2$$

ACTIVIDAD 9.1.1.3. Encuentren el área de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

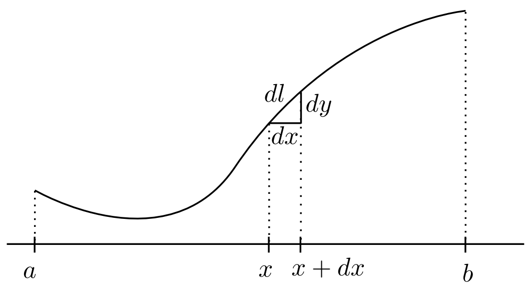
¿Pueden construir una fórmula para el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con semieje $a > b$?

GEOGEBRA 9.1.1.4. GeoGebra está programado para calcular áreas entre curvas. Si ya han definido dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, prueben el comando

```
IntegralEntre[f(x),g(x),a,b]
```

9.1.2 Cálculo de la longitud de una curva

Consideremos una curva dada como la gráfica de una función $f(x)$, derivable en un intervalo $[a, b]$. Nos interesa calcular la longitud L de la curva, desde $x = a$ hasta $x = b$.



Como la función $f(x)$ es derivable, un tramo infinitesimal de la curva se aproxima bien por su recta tangente. Vamos a organizar un cálculo para sumar longitudes infinitesimales de segmentos de recta tangente.

Para recorrer la curva usamos la variable x, en el rango entre a y b. Por cada incremento dx recorrido sobre el eje se acumula una longitud de curva infinitesimal que llamamos dl y que vamos a calcular sobre la recta tangente a la gráfica. Recuerden (sección 3.2.1) que reemplazar la gráfica de la función por la recta tangente es lo que hacemos al trabajar con diferenciales: a un incremento dx le corresponde un incremento de altura $dy = f'(x)\,dx$. La longitud dl se calcula como la hipotenusa del triángulo rectángulo de base dx y altura dy,

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sqrt{(dx)^2 + (f'(x))^2\,(dx)^2} \\ &= \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \end{aligned}$$

Para calcular la longitud de la curva completa solo falta integrar entre $x = a$ y $x = b$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

EJEMPLO 9.1.2.1. Les proponemos un ejemplo concreto:

Consigna: Calculen la longitud de un tramo de la parábola $y = x^2$, entre $x = 1$ $x = 5$.

Sugerencia: para organizar el cálculo grafiquen la curva y marquen el tramo indicado.

Control: comparen su resultado con la cantidad de segmentos de longitud 1 que pueden dibujar "acompañando" la parábola.

Plus: ¿Pueden dar la fórmula de longitud para un tramo genérico de la parábola, desde el vértice hasta un punto de abscisa x? ¿Cómo se interpretaría la derivada de esta fórmula respecto de x?

Actividades

ACTIVIDAD 9.1.2.1. Calculen usando integrales la longitud del segmento de recta que une los puntos $(-3, 1)$ y $(5, 5)$. ¿Da lo mismo que la fórmula de distancia entre dos puntos?

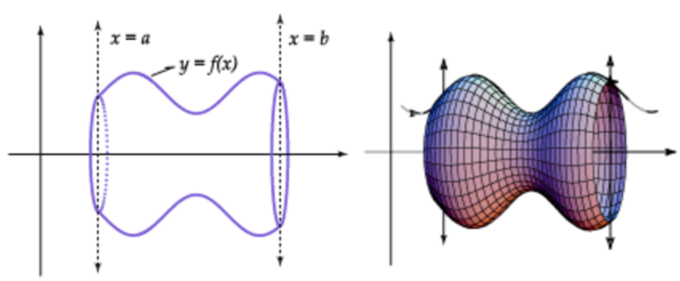
ACTIVIDAD 9.1.2.2. Estamos en condiciones de demostrar otro resultado fundamental de la Geometría: la fórmula que da la longitud de una circunferencia de radio R.

Como mencionamos en la actividad 9.1.1.2, podemos escribir $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ para representar la semi-circunferencia superior, y también $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ para representar la semi-circunferencia inferior. Calculen ustedes, con la integral apropiada, la longitud de cada semi-circunferencia. Si sale todo bien, al sumarlas van a obtener

$$\text{Longitud de la circunferencia } = 2\pi R$$

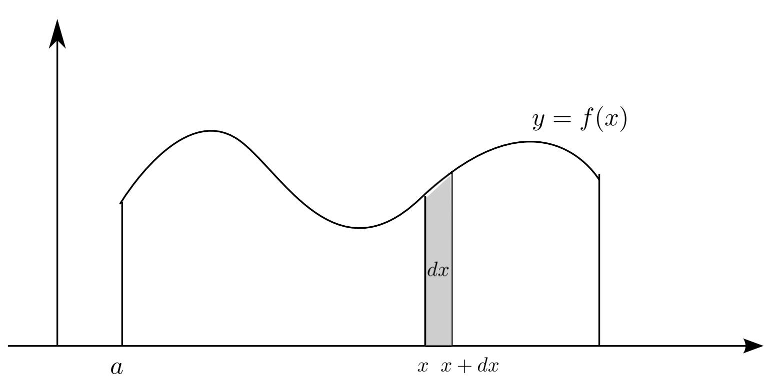
9.1.3 Cálculo del volumen de un sólido de revolución

Imaginen una pieza trabajada en un torno (por ejemplo, la columna de una baranda de madera). Se trata de un volumen con un eje de simetría, y un perfil dado por la distancia de la superficie a dicho eje: si bien esta distancia varía a medida que recorremos el eje de la pieza, en cada posición se mantiene constante al dar una vuelta alrededor del eje. Un corte perpendicular al eje de simetría es un círculo de radio r, que depende del punto x del eje que se considere. A los cuerpos con esta forma se los llama sólidos de revolución.



Nos interesa calcular el volumen de un sólido de revolución, conociendo su perfil. Llamemos x al eje de simetría, y $f(x)$ al radio del corte hecho en el punto x, y digamos que el sólido ocupa un intervalo del eje, desde $x = a$ hasta $x = b$. El sólido se genera rotando sobre el eje una gráfica $y = f(x)$ como la que mostramos más abajo; al dar la vuelta al eje cada intervalo infinitesimal de ancho dx como el sombreado genera un disco infinitesimal de radio $f(x)$ y espesor dx

b



En esta aplicación la variable x recorre el rango entre a y b. Cada disco infinitesimal tiene una base circular de superficie $\pi\,(f(x))^2$ y un espesor dx; su volumen se calcula como superficie de la base por altura, por lo que obtenemos un diferencial de volumen

$$dV \quad = \quad \pi\,(f(x))^2\,dx$$

La expresión para calcular el volumen completo resulta de acumular las contribuciones infinitesimales y queda dada por la integral

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

EJEMPLO 9.1.3.1. Consigna: consideren la gráfica del tramo de parábola $x = y^2 + 1$ recorrida desde $x = 1$ hasta $x = 5$ y calculen el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la gráfica alrededor del eje x.

Sugerencia: para organizar el cálculo grafiquen la curva y el sólido de revolución que genera, en un dibujo tridimensional.

Control: comparen su resultado con el volumen de un cilindro recto que pueden dibujar encerrando el sólido indicado.

Plus: Si la gráfica se rotara alrededor del eje y, ¿qué integral plantearían para calcular el volumen del sólido de revolución que se genera?

Actividades

ACTIVIDAD 9.1.3.1. Calculen el volumen de un paraboloide de rotación, generado por rotación de la parábola $y = x^2$ alrededor de su eje de simetría, para x entre $0\,cm$ y $10\,cm$.

ACTIVIDAD 9.1.3.2. Calculen el volumen de una esfera de radio R, tratándola como el sólido que se genera al girar una semicircunferencia del mismo radio. Comparen con la fórmula de Geometría elemental,

$$\text{Volumen de la esfera } = \frac{4}{3}\pi R^3$$

ACTIVIDAD 9.1.3.3. Un fármaco se presenta al público en comprimidos con forma de elipsoide achatado: el sólido generado al rotar la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, con $a = 5\,mm$ y $b = 2\,mm$, alrededor del eje y. A fin de calcular la dosis de fármaco contenida en cada comprimido les encargan calcular su volumen.. ¿Pueden hacerlo?

9.1.4 Trabajo y energía

El trabajo mecánico es una de las formas en que un sistema físico puede transferir energía a otro sistema: cuando un sistema empuja a otro, y ese empuje produce un desplazamiento, transfiere energía. La cantidad de energía transferida es la medida del trabajo mecánico realizado, y es común anotarla con la letra W. Si en el proceso consideramos un desplazamiento infinitesimal, podemos hablar de un diferencial de trabajo dW; luego el trabajo total es la acumulación de estas contribuciones a lo largo del desplazamiento completo.

La forma general de escribir dW requiere el uso de vectores y escapa a nuestro curso. Sin embargo, en algunas situaciones particulares les podemos contar cómo representar el diferencial de trabajo:

- Cuando se realiza una fuerza F sobre un objeto en la misma dirección que su desplazamiento dx, el diferencial de trabajo realizado por la fuerza sobre el objeto se expresa

  $$dW = F\,dx$$

  Realizarán cálculos de este tipo, y en situaciones más generales, en Física.

- Cuando un gas, con una presión P, mueve las paredes del recipiente que lo contiene y produce un aumento de volumen dV, el diferencial de trabajo realizado por el gas sobre el recipiente se expresa

$$dW = P\,dV$$

Realizarán cálculos de este tipo en Química.

Veamos el planteo del cálculo de trabajo (o energía transferida) en estas dos situaciones.

EJEMPLO 9.1.4.1. Un mol de gas ideal encerrado en un cilindro se mantiene a temperatura constante T. Su presión P y su volumen V se relacionan por la ley de gases ideales

$$PV = nRT$$

donde n es el número de moles y R es una constante (conocida como constante universal de los gases). En un proceso de expansión el gas empuja un pistón y su volumen pasa de un valor V_1 a un valor V_2. Se necesita calcular el trabajo realizado por el gas.

La variable que describe la expansión del gas es el volumen V, que se mueve en el rango entre V_1 y V_2. Para describir todo el proceso las demás cantidades se deben escribir en función del volumen V. En este problema la temperatura T es constante, y se puede escribir la presión P en función del volumen (como hicimos en el ejemplo 2.1.1.1) despejando

$$P(V) = nRT\frac{1}{V}$$

El diferencial de trabajo realizado, definido como $dW = P\,dV$, se escribe en función del volumen como

$$dW = nRT\frac{1}{V}\,dV$$

El trabajo total realizado por el gas es la integral

$$W = nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V}\,dV$$

donde ya hemos sacado fuera de la integral las constantes n, R y T. Podemos resolver esta integral usando una primitiva de la tabla básica y la regla de Barrow. El resultado es

$$W = nrT\left[\ln V\right]_{V_1}^{V_2} = nRT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

En los cursos en que los alumnos no manejan integrales, este y otros resultados se deben recordar como fórmulas de memoria (con muchas fórmulas distintas para situaciones distintas, como la expansión a presión contante, la expansión adiabática, etc.). En cambio, usando integrales, uno puede recordar la relación básica $dW = P\,dV$ y resolver cada caso que se presente.

EJEMPLO 9.1.4.2. Se estudia un cuerpo unido al extremo de un resorte. Al estirar el resorte una longitud x, su extremo ejerce una fuerza $F(x) = -kx$ sobre el cuerpo (el signo $-$ indica que la fuerza es opuesta a la dirección del desplazamiento). Calculemos el trabajo ejercido por el resorte sobre el cuerpo al estirarse desde $x = 0$ hasta una distancia d.

El diferencial de trabajo en un desplazamiento infinitesimal se construye como

$$dW = F\,dx = -kx\,dx$$

y el trabajo que realiza el resorte sobre el cuerpo se calcula entonces como la integral

$$W = \int_0^d -kx\,dx = -k\frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^d = -\frac{1}{2}kd^2$$

> Esta expresión cambiada de signo, es decir $\frac{1}{2}kd^2$, es la fórmula de **energía potencial** elástica acumulada por el resorte. Nuevamente comentamos que, si usan integrales, esta y otras energías potenciales se calculan como la integral de $-F(x)\,dx$; en cambio, si no usan integrales, deben memorizar fórmulas distintas para cada tipo de energía potencial.

Actividades

Actividad 9.1.4.1. Calculen el trabajo mecánico realizado por un gas cuando se expande manteniendo su presión P constante, desde un volumen V_1 hasta un volumen V_2. Esta fórmula sencilla se puede calcular sin integrales, ¿por qué?

Actividad 9.1.4.2. Calculen el trabajo mecánico realizado por una fuerza F constante que arrastra un cuerpo a lo largo de una distancia d. Esta fórmula sencilla se puede calcular sin integrales, ¿por qué?

Otras aplicaciones

Estas aplicaciones en Química y Física son ilustrativas, les será útil volver a mirarlas cuando trabajen estos temas en otras materias. Podríamos describir muchas otras para mostrar que su estudio conduce al cálculo de integrales. No insistiremos más ya que probablemente todavía no han estudiado el contexto en que se plantean.

Esperamos que recuerden que las han visto en el curso de Análisis Matemático, y que les resulte natural plantear y resolver integrales cuando un problema lo requiera.

9.2 Funciones especiales definidas como integrales

Contenidos de esta sección: definición formal de la función logaritmo natural y de la función exponencial natural. Función error.

La integral de Riemann nos permite construir nuevas funciones, a partir de una función conocida: si $f(x)$ es continua en un intervalo I, y a es un punto de ese intervalo, la expresión

$$F_a(x) = \int_a^x f(u)\, du$$

tiene un y solo un resultado para cada x en el intervalo I. Además, el Teorema Fundamental del Cálculo asegura que esta nueva función $F_a(x)$ es derivable en I, con $F_a'(x) = f(x)$. Es decir, $F_a(x)$ es una primitiva de $f(x)$.

En la mayoría de los casos que hemos visto pudimos conseguir, por distintos métodos de integración, la expresión de una primitiva de $f(u)$ en términos de funciones conocidas. Entonces aprendemos que esta "nueva" función $F_a(x)$ no es otra cosa que esa primitiva, más alguna constante. Pero en otros casos no existe una expresión cerrada para la primitiva de $f(u)$, y entonces la función $F_a(x)$ es realmente nueva. Varias funciones importantes en Ciencias se definen con este mecanismo, y por ser nuevas reciben nombres nuevos.

Un primer ejemplo es la **definición formal de la función logaritmo natural**. Recuerden que en este curso introdujimos la función exponencial de variable real como una generalización de las potencias racionales; en ningún momento definimos rigurosamente el significado de $\exp(x)$ con x irracional. En consecuencia, la función logaritmo, presentada como inversa de la exponencial, tampoco quedó bien definida. Lo que haremos ahora es definir la función logaritmo natural a partir de una función algebraica y una operación integral. Como mencionamos en la sección 6.2, si probamos que el logaritmo natural es una función biyectiva, la exponencial natural se define rigurosamente como su inversa.

Muchos libros de Análisis Matemático esperan este momento para introducir la función logaritmo natural, y luego la exponencial. Siendo éste un curso cuatrimestral, hemos preferido introducir tempranamente estas funciones tan importantes para afianzar su uso y propiedades.

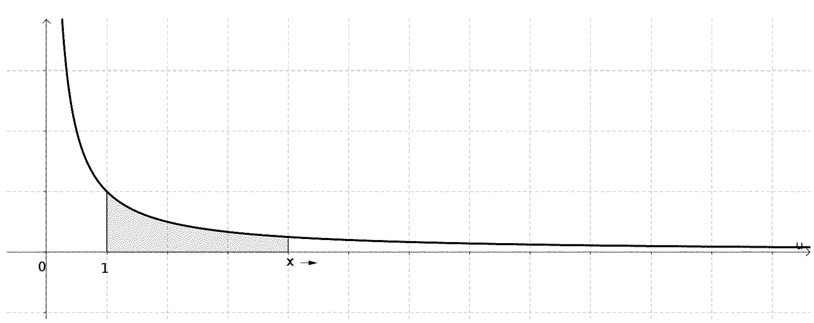
9.2.1 Función logaritmo natural como función integral

Supongan por un momento que no conocen la función logaritmo natural (o que no aceptan que la estemos usando sin una definición precisa).

Consideren la función integral de $1/x$, definida para $x > 0$ como

$$F_1(x) = \int_1^x \frac{1}{u}\, du$$

Esta función está bien definida y representa la función área acumulada bajo la gráfica de $y = 1/u$, entre $u = 1$ y $u = x$.



Dado que $1/u$ es continua en el intervalo $(0,+\infty)$, según el Teorema Fundamental del Cálculo $F_1(x)$ es derivable en todo su dominio. Es decir, la función

$$F_1 : (0,+\infty) \to \mathbb{R} \quad \text{con regla de asignación } F_1(x) = \int_1^x \frac{1}{u}\, du$$

está bien definida y es derivable en todo su dominio, con función derivada

$$F_1'(x) = 1/x$$

Si no conocemos la función $\ln(x)$, entonces la expresión de $F_1(x)$ es la **definición** del logaritmo natural. Repitiendo la idea,

> *Se* **define** *la función logaritmo natural como*
> $$\ln : (0,+\infty) \to \mathbb{R} \quad \text{con regla de asignación } \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{u}\, du$$

A partir de esta definición y usando propiedades de las integrales se pueden probar todas las propiedades del logaritmo natural. Por ejemplo, es inmediato que $\ln(1) = 0$, que $\ln(x) < 0$ para $x \in (0,1)$ o que $\ln'(x) = 1/x$. También se puede probar que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$, etc. Probemos la primera en detalle:

Ejemplo 9.2.1.1. Dados dos números reales positivos a y b, el logaritmo de ab se puede reescribir usando propiedades de la integral de Riemann como

$$\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{u}\, du = \int_1^{a} \frac{1}{u}\, du + \int_a^{ab} \frac{1}{u}\, du = \ln(a) + \int_a^{ab} \frac{1}{u}\, du$$

La segunda integral se puede trabajar por sustitución llamando $u = av$, con lo cual $du = a\, dv$ y los límites de integración son $v = a/a = 1$ y $v = ab/a = b$:

$$\int_a^{ab} \frac{1}{u}\, du = \int_1^{b} \frac{1}{av} a\, dv = \int_1^{b} \frac{1}{v}\, dv = \ln(b)$$

En conclusión, obtenemos que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

La función $\ln(x)$ así definida es biyectiva. Por un lado, $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{u}\, du$ tiene función derivada $\ln'(x) = 1/x$ en todo su dominio, por lo que es estrictamente creciente en $(0,+\infty)$, y en consecuencia es inyectiva. Por otro lado, se puede probar que es suryectiva. Explorando los bordes del dominio $(0,+\infty)$ se encuentra[1] que

$$\lim_{x\to 0^+} \int_1^x \frac{1}{u}\, du = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to +\infty} \int_1^x \frac{1}{u}\, du = +\infty$$

y en consecuencia la imagen del logaritmo natural cubre todos los reales .

Recuerden que se puede definir $\ln(x)$ a partir de una función algebraica sencilla y bien conocida, $y = 1/x$. Para esto se utilizan las sumas de Riemann y el límite que define la integral de Riemann. Recién a esta altura del curso podemos hacerlo con rigor matemático.

Actividades

Actividad 9.2.1.1. Usando la definición integral del logaritmo natural,

- Calculen $\ln(1)$.
- Dados c y d, positivos, prueben que $\ln(c/d) = \ln(c) - \ln(d)$. Deben usar la propiedad de aditividad de la integral definida, y una sustitución adecuada.
- Propongan una definición para el número e. Interpreten gráficamente.

[1] Los límites que proponemos se llaman integrales impropias, como veremos al final de este capítulo.

9.2.2 Función exponencial natural como inversa del logaritmo natural

Dado que la función $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función biyectiva, sabemos que existe su función inversa. La **definición formal de la función exponencial natural**, entonces, se formula como inversa del logaritmo natural. Repitiendo la discusión de la sección 6.2,

> *Se* **define** *la función exponencial natural como*
>
> $$\begin{array}{rccl} & \exp : \mathbb{R} & \to & (0, +\infty) \\ \text{que a } y \text{ le asigna el único valor} & \exp(y) = x & \text{tal que} & \ln(x) = y \end{array}$$

A partir de esta definición se pueden probar las distintas propiedades de la función exponencial natural. Por ejemplo, que $e^a e^b = e^{a+b}$.

Ejemplo 9.2.2.1. Para probar que $e^a e^b = e^{a+b}$ nos apoyamos en los logaritmos asociados. Conviene asignar algunos nombres

$$\begin{aligned} y = e^{a+b} &\quad \text{que corresponde a} \quad a + b = \ln y \\ u = e^a &\quad \text{que corresponde a} \quad a = \ln u \\ v = e^b &\quad \text{que corresponde a} \quad b = \ln v \end{aligned}$$

Usando suma de logaritmos podemos relacionar

$$\ln y = a + b = \ln u + \ln v = \ln(uv)$$

Luego tomamos exponenciales

$$y = e^{\ln y} = e^{\ln(uv)} = uv$$

y reemplazando el significado de y, u y v obtenemos

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

Recuerden que las propiedades de la función exponencial no provienen del cálculo de potencias, sino que se derivan de las propiedades del logaritmo. Por eso podemos trabajar con expresiones como x^r, siendo r cualquier número real.

9.2.3 Función error

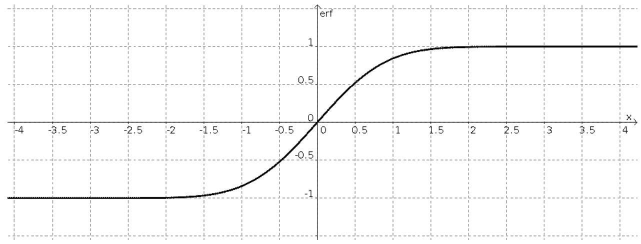
Mencionemos un ejemplo más de una función definida como integral. Esta es realmente nueva en nuestro curso, se llama **función error**[2] y es de uso frecuente en aplicaciones de Estadística (por ejemplo, en la teoría de errores de los procesos de medición experimental).

Se define

$$\text{erf} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{con regla de asignación } \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Como comentamos en la sección 8.4.5, se sabe que no se puede encontrar una primitiva escrita con funciones elementales. A pesar de eso, la función error está bien definida y hay técnicas para calcularla con la precisión deseada. Está incluida en calculadoras y programas de cálculo, por ejemplo en GeoGebra. Su gráfica es

[2]Error function en inglés, por eso se la anota **erf**.



y por supuesto conocemos su derivada,

$$\mathsf{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

Actividades

Actividad 9.2.3.1. Si bien no tienen una expresión cerrada para la función error, sí tienen la expresión de su derivada. Realicen un análisis completo de la gráfica de la función error, con las recomendaciones dadas en el Capítulo 5.

9.3 Ecuaciones diferenciales

Contenidos de esta sección: nociones de ecuaciones diferenciales. Ecuaciones diferenciales de primer orden sencillas: integración por separación de variables. Aplicación: modelos exponenciales.

9.3.1 Introducción

En esta sección vamos a plantear un tipo de problemas bastante distinto a los anteriores. Se trata de manejar incrementos infinitesimales de una función $y = f(x)$ con ciertas propiedades locales, cuando no se conoce la expresión de $f(x)$. El objetivo será construir una fórmula para esa función desconocida.

Los modelos matemáticos de los fenómenos de la Naturaleza toman su forma más sencilla cuando relacionan derivadas o incrementos diferenciales de las variables de interés. Por ejemplo:

- La cantidad de bacterias nuevas en un cultivo, nacidas en un intervalo de tiempo dt pequeño, se puede suponer como proporcional al tiempo transcurrido (dt) y al número de bacterias presentes (más bacterias vivas, más nacimientos por segundo). Si llamamos $N(t)$ al número N de bacterias presentes[3] en función del tiempo t, y llamamos dN a la cantidad de bacterias nacidas en el intervalo de tiempo dt, se propone una relación de proporcionalidad entre diferenciales:

  $$dN = kN(t)\,dt$$

  donde k es una constante de proporcionalidad. Noten que no se espera que esta proporcionalidad sea válida en intervalos de tiempo largos, porque mientras el número de bacterias $N(t)$ va aumentando con el tiempo, la cantidad de nacimientos por segundo también va aumentando. La relación de proporcionalidad solamente tiene sentido si la consideramos en forma **instantánea**, y para eso **necesitamos usar diferenciales**. La misma relación también se puede escribir con derivadas: siendo N una función de t, dN significa $N'(t)\,dt$. Simplificando los factores dt obtenemos la relación

  $$N'(t) = kN(t)$$

  Esta ecuación, tanto en la forma que involucra diferenciales como en la forma que involucra la derivada de una función y la función misma es un primer ejemplo de **ecuación diferencial**. Resolverla significa **encontrar una expresión para la función** $N(t)$ que cumpla la ecuación.
- La segunda ley de Newton establece que la derivada de la velocidad de un objeto en movimiento, respecto del tiempo, es proporcional a la fuerza aplicada sobre el objeto. Si llamamos[4] v a la velocidad, F a la fuerza aplicada, m a la masa del cuerpo y t a la variable tiempo, esta ley fundamental se escribe

  $$v'(t) = \frac{F}{m}$$

  Multiplicando ambos lados de la ecuación por un intervalo infinitesimal de tiempo dt, obtenemos la ecuación en forma diferencial,

  $$dv = \frac{F}{m}\,dt$$

  De esta única relación diferencial, y según el comportamiento de la fuerza aplicada, se deducen todos los distintos tipos de movimiento rectilíneo (con velocidad constante, con aceleración uniforme, oscilatorio, amortiguado, etc.).
- En el decaimiento de una sustancia radiactiva el número N de isótopos radiactivos disminuye con el tiempo t. Un modelo sencillo indica que la velocidad de decaimiento es negativa y proporcional al número de isótopos activos N:

  $$N'(t) = -kN(t)$$

[3] Consideramos N como una variable real para usar las herramientas del Análisis Matemático.

[4] La velocidad y la fuerza son cantidades vectoriales. En esta discusión, para no desviarnos de nuestro objetivo, nos restringimos a trabajar con una sola componente.

que en lenguaje diferencial se escribe

$$dN = -kN\,dt$$

Para escribir un planteo abstracto de estas situaciones, observen que en los ejemplos siempre se asume que una cierta variable (digamos y) es una función derivable de otra variable (digamos x) y se establece que la derivada $y'(x)$ depende del valor de la función $y(x)$; con más generalidad, la derivada $y'(x)$ puede depender tanto del valor de la función $y(x)$ como del valor de la variable x. La forma general de escribir estas relaciones como ecuaciones es

$$y'(x) = a(x, y(x))$$

donde $a(x, y(x))$ es una expresión[5] que depende del valor de la variable x y también del valor que tome la función y para ese valor de x. La ecuación que estamos discutiendo es una **ecuación diferencial** y el problema que se plantea no es encontrar un número, sino **encontrar una función** que satisfaga la igualdad.

> *Se llama* **ecuación diferencial** *a una igualdad donde se considera incógnita a una función, y donde interviene no solo la función, sino también sus derivadas.*
>
> *Una* **solución de una ecuación diferencial** *será una función definida y derivable en cierto dominio, tal que al reemplazar la función y sus derivadas en la ecuación se verifique la igualdad para todos los puntos de ese dominio.*

Como mencionamos en los ejemplos, estas ecuaciones diferenciales de la forma $y'(x) = a(x, y(x))$ también se pueden escribir como ecuaciones que relacionan incrementos diferenciales de la función y y de su variable x. Para pasar a la forma diferencial hay que suponer que existe una solución $y(x)$ (todavía desconocida), situarse en un punto genérico x, y multiplicar ambos lados por dx

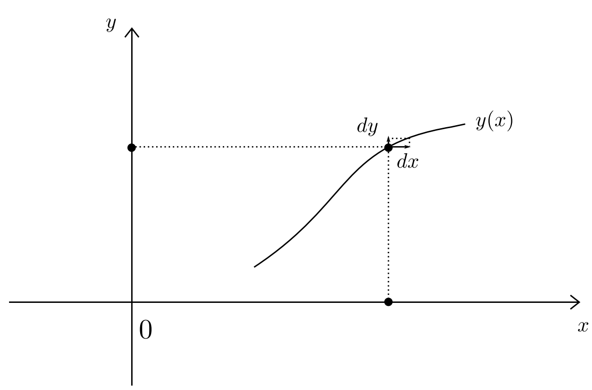
$$y'(x)\,dx = a(x, y(x))\,dx$$

Recordando que $dy = y'(x)\,dx$, la ecuación se escribe

$$dy = a(x, y(x))\,dx$$

Interpretación gráfica

En cada punto $(x, y(x))$ del plano la ecuación diferencial establece una relación entre dy y dx, es decir cuánto varía y ante una variación infinitesimal de x. Para fijar la idea conviene tener una imagen gráfica:



No conocemos la función $y(x)$, pero tenemos una relación local entre los incrementos. A partir de esa relación intentamos recuperar la función completa. En cierto sentido, queremos pasar del **conocimiento local** de la función incógnita al **conocimiento global** de esa función.

[5]Usamos la notación típica de funciones de dos variables, que verán en Análisis Matemático II, para indicar que el valor a está dado por una expresión que involucra a x y a $y(x)$.

Este punto de vista es muy significativo en la construcción de modelos aplicados; de alguna manera, se trata de una "regla de tres simple" de validez local (es decir, de una proporcionalidad entre dy y dx), generalizada al permitir que la "constante" de proporcionalidad $a(x, y(x))$ varíe en cada punto de la curva solución.

9.3.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Resumamos con lenguaje preciso lo que contamos en la introducción anterior, y trabajemos ejemplos concretos.

Se llama **ecuación diferencial ordinaria de primer orden**, en **forma normal**, a una igualdad de la forma

$$y'(x) = a(x, y(x))$$

donde se asume que $y(x)$ es una función derivable de x en cierto dominio I, y que $a(x, y(x))$ es una expresión que puede depender tanto de x como de y. Se dice que la ecuación diferencial es **ordinaria** porque la función incógnita $y(x)$ depende de una sola variable x, y se dice que es de **primer orden** porque en la ecuación interviene solo la derivada primera $y'(x)$. Además, se dice que está escrita en **forma normal** cuando se puede despejar explícitamente la derivada primera $y'(x)$ en términos de la función $y(x)$ y de la variable independiente x.

Se llama **solución de la ecuación diferencial** en el dominio I a cualquier función $y : I \to \mathbb{R}$ derivable tal que reemplazada en la ecuación diferencial satisfaga la igualdad.

EJEMPLO 9.3.2.1. Consideremos la ecuación diferencial

$$y'(x) = 2y(x)$$

(no declaramos el dominio de la ecuación diferencial, sino que se esperamos construir soluciones en el mayor dominio posible; luego tendremos que verificar su dominio de validez).

Alguien que conoce el tema de ecuaciones diferenciales nos dice que

$$y(x) = 4e^{2x}$$

es solución en todo el eje real. Podemos verificar si es cierto: en primer lugar $y(x) = 4e^{2x}$ es derivable en todo el eje real, con

$$y'(x) = 8e^{2x}$$

Por otro lado, calculamos

$$2y(x) = 2 \cdot (4e^{2x}) = 8e^{2x}$$

y encontramos que, efectivamente, $y'(x) = 2y(x)$. Por lo tanto la función $y(x) = 4e^{2x}$ es una solución correcta.

¿Habrá más soluciones? Mirando el cálculo anterior, vemos que la derivada de e^{2x} aporta un factor 2; el coeficiente 4 de la solución, que aparece en ambos lados de la igualdad, podría haber sido distinto. Es decir, cualquier función de la forma

$$y(x) = Ae^{2x}$$

también satisface la ecuación:$y'(x) = Ae^{2x} \cdot 2 = 2y(x)$. Se dice que existe una **familia de soluciones**, parametrizada por los valores de una constante A arbitraria.

Si existe la solución de una ecuación diferencial, en general **no es única***: se espera encontrar una* **familia de soluciones***, dependientes de parámetros arbitrarios.*
Cuando se pueda probar que una familia incluye todas las soluciones posibles, se dice que se ha encontrado la **solución general** *de la ecuación diferencial.*

EJEMPLO 9.3.2.2. Escribamos algunas ecuaciones diferenciales de primer orden, en forma normal, para reconocer su forma y acostumbrarnos a la notación. En todas se busca una función $y(x)$; una vez avisado esto, es usual escribir brevemente y en lugar de $y(x)$.

- $y' = 2x$, que traducida a forma diferencial se escribe $dy = 2x\,dx$
- $y' = 3xy$, que en forma diferencial se escribe $dy = 3xy\,dx$
- $y' = xy - x^2$, equivalente a $dy = \left(xy - x^2\right)\,dx$

Actividades

ACTIVIDAD 9.3.2.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes preguntas:

- ¿Qué es una ecuación diferencial de primer orden?
- ¿Qué esperan encontrar al resolver una ecuación de este tipo?

9.3.3 Ecuaciones diferenciales de primer orden que se pueden resolver por separación de variables

La **aplicación de integrales** que vamos a hacer nos permite resolver solamente **algunas ecuaciones diferenciales de primer orden**. Entre los ejemplos anteriores, podremos encontrar soluciones de $y' = 2x$ y de $y' = 3xy$, pero no podremos resolver $y' = xy - x^2$. Hay técnicas más elaboradas, en el marco de funciones de dos variables, que pueden ver en un segundo curso de Análisis Matemático. También son importantes en Ciencias las ecuaciones las ecuaciones de segundo orden (que involucran derivadas segundas), que se pueden ver en cursos más avanzados; algunas se saben resolver, y llevan los nombres de quienes lo lograron por primera vez, pero otras continúan siendo tema de investigación en Matemática.

Ecuaciones que se resuelven por integración directa

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden más sencillas de resolver son de la forma

$$y'(x) = g(x)$$

cuando $g(x)$ es una función conocida. Esta ecuación nos dice que conocemos la derivada $y'(x)$, es decir que la función $y(x)$ que buscamos es una primitiva de $g(x)$. La solución se construye integrando

$$y(x) = \int g(x)\,dx$$

Si conseguimos **una** primitiva $G(x)$, podemos expresar **todas** las soluciones como

$$\boxed{y(x) = G(x) + C}$$

La solución, como anticipamos, no es única. Tenemos una familia de infinitas funciones, según el valor que elijamos para la constante de integración C.

EJEMPLO 9.3.3.1. Consideremos el movimiento de un objeto de masa $m = 100$ gramos sometido a una fuerza oscilante que depende del tiempo como $F(t) = 1000\,\cos(5t)$ Newton (con el tiempo t expresado en segundos). La segunda ley de Newton, que escribimos en la introducción como $dv = \frac{F}{m}\,dt$, nos plantea la ecuación diferencial

$$v'(t) = 10\cos(5t)$$

(con v en metros/segundo). Luego la velocidad del objeto se expresa con la función

$$v(t) = 10\int \cos(5t)\,dt = 2\mathrm{sen}(5t) + C$$

donde el valor de C no se conoce.

Si además conocemos que la velocidad al principio del movimiento (cuando $t = 0$) era, por ejemplo, 3 metros/segundo, se puede seleccionar una **solución particular** fijando el valor de la constante C. Para eso se plantea que una solución cumpla la **condición inicial**

$$v(0) = 2\text{sen}(5 \cdot 0) + C = 3$$

y se despeja $C = 3$. La solución particular que nos da la velocidad en función del tiempo, con velocidad inicial de 3 metros/segundo, es

$$v(t) = 2\text{sen}(5t) + 3$$

Ecuaciones que se resuelven por separación de variables

Consideremos ahora ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, en forma normal, en las cuales el lado derecho se pueda escribir como producto de un factor que dependa solo de x y otro factor que dependa solo de y. Es decir, ecuaciones de la forma

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

En estos casos es apropiada la técnica de **separación de variables**, que permite integrar la ecuación por el método de sustitución.

Asumiendo que $g(y) \neq 0$, podemos escribir

$$\frac{1}{g(y)}\, y' = f(x)$$

Notamos que el lado izquierdo depende solo de y, en tanto que el lado derecho depende solo de x. Cuando escribimos la ecuación de esta forma se dice que hemos separado las variables.

No olviden que y es una función (desconocida) de x; para ser precisos, ambos lados de la igualdad dependen de x, pero el lado izquierdo depende de x solamente a través de la composición con $y(x)$.

Dado que ambos lados, como funciones de x, son iguales, entonces serán iguales sus primitivas a menos de una constante de integración. Podemos escribir la igualdad de las primitivas "integrando ambos lados"

$$\int \frac{1}{g(y(x))}\, y'(x)\, dx = \int f(x)\, dx$$

y notar que el lado izquierdo tiene la forma adecuada para integrar por sustitución. Proponemos la sustitución $y = y(x)$ en el lado izquierdo, con $dy = y'(x)\, dx$, con lo cual

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx$$

Esta ecuación está lista para resolver las integrales: si podemos encontrar primitivas para ambos lados, sin olvidar las constantes de integración, obtendremos una ecuación relacionando y con x. Si además se puede despejar explícitamente y en función de x tendremos una expresión $y(x)$ para la función solución; y si no es posible despejar, nos conformaremos con una relación implícita.

Veamos cómo se aplica este procedimiento en dos ejemplos.

EJEMPLO 9.3.3.2. En un cierto problema necesitamos a hallar soluciones de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{2x}{y+1}$$

donde se entiende que y es una función derivable de x.

Primero pasamos el denominador $y + 1$ al lado izquierdo, para que y aparezca solamente a un lado de la igualdad y x aparezca solamente del otro lado:

$$(y + 1)\, y' = 2x$$

Luego multiplicamos ambos lados por el diferencial dx para escribir la ecuación en forma diferencial, usando que $y'\,dx = dy$:

$$(y+1)\ dy = 2x\,dx$$

e integramos ambos lados:

$$\int (y+1)\ dy = \int 2x\,dx$$

- En el lado izquierdo, calculamos la integral

$$\int (y+1)dy = \frac{1}{2}y^2 + y + C_1$$

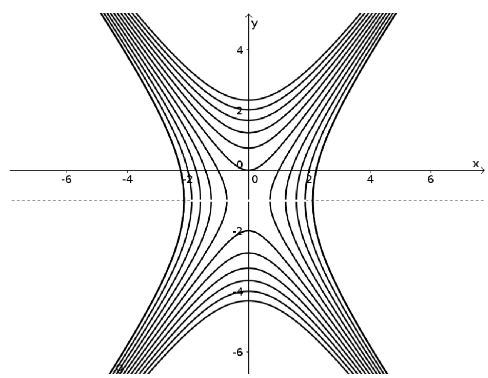
- En el lado derecho, calculamos la integral

$$\int 2x\,dx = x^2 + C_2$$

Igualando ambos resultados (y juntando como es usual las constantes desconocidas en una sola, $C_2 - C_1 = C$) obtenemos

$$\frac{1}{2}y^2 + y = x^2 + C$$

Esta ecuación expresa una relación implícita entre x e y. Como ecuación en dos variables es conocida, representa hipérbolas como habrán visto en Álgebra. Los distintos valores de la constante C describen toda una familia de hipérbolas, les mostramos algunas de ellas en la siguiente gráfica :



Noten que marcamos huecos a la altura $y = -1$, porque allí no tiene sentido un valor de $y' = \dfrac{2x}{y+1}$.

Esta ecuación en dos variables define implícitamente soluciones $y(x)$ de la ecuación diferencial. para escribirlas tenemos que despejar $y(x)$ de la ecuación cuadrática,

$$y(x) = -1 \pm \sqrt{1 + 2(x^2 + C)}$$

Así encontramos la **solución general**, expresada como dos familias de soluciones: para cada valor de C hay dos soluciones, definidas en un dominio tal que el radicando $1 + 2(x^2 + C)$ sea positivo:

$$y_1(x) = -1 + \sqrt{1 + 2(x^2 + C)} \quad \text{si } 1 + 2(x^2 + C) > 0$$

$$y_2(x) = -1 - \sqrt{1 + 2(x^2 + C)} \quad \text{si } 1 + 2(x^2 + C) > 0$$

Observen que la integración fue sencilla, solamente los pasos algebraicos para despejar $y(x)$ obteniendo dos familias de soluciones resultan algo engorrosos.

EJEMPLO 9.3.3.3. Busquemos una **solución particular** $y(x)$ de la ecuación diferencial

$$y' = \cos x \cdot e^y$$

que cumpla la **condición inicial** $y(\pi) = 0$.

Empezamos por separar variables

$$e^{-y}\, y' = \cos x$$

y plantear las integrales de cada lado

$$\int e^{-y}\, y' = \int \cos x\, dx$$

Encontramos las primitivas en la tabla básica y obtenemos la ecuación

$$-e^{-y(x)} = \text{sen} x + C$$

La condición $y(\pi) = 0$ nos dice que la igualdad se cumple cuando reemplazamos $x = \pi$ e $y = 0$,

$$-e^0 = \text{sen}\pi + C$$

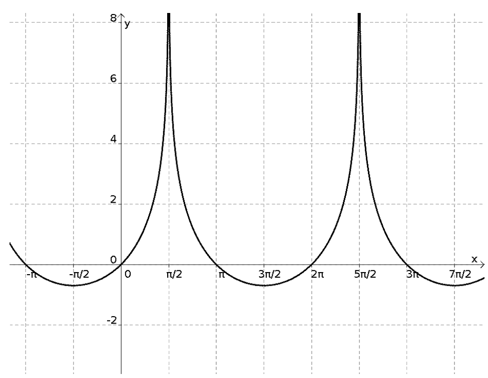
de donde despejamos $C = -e^0 - \text{sen}\pi = -1$. Por lo tanto, la solución particular que buscamos está implícita en la ecuación

$$e^{-y(x)} = 1 - \text{sen} x$$

Como en el ejemplo anterior, la parte trabajosa es despejar $y(x)$: podemos hacerlo tomando logaritmos, siempre que $1 - \text{sen} x > 0$; esto excluye los puntos donde $\text{sen} x = 1$ ($x = \pi/2,\ 5\pi/2,\ 9\pi/2,\ \cdots$). Encontramos soluciones entre dos de esos puntos, por ejemplo en el intervalo $(\pi/2, 5\pi/2)$, despejando

$$y(x) = -\ln(1 - \text{sen} x)$$

Esta solución, y las que se obtienen en otros intervalos, se muestran en la siguiente gráfica:



La que corresponde al problema planteado es la que tiene dominio $(\pi/2, 5\pi/2)$, porque la condición inicial está dada en $x = \pi$.

Las gráficas de las distintas soluciones de una ecuación diferencial se conocen como **curvas integrales**. El nombre es significativo, se debe a que las soluciones se obtienen integrando.

Actividades

ACTIVIDAD 9.3.3.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes preguntas:

- ¿Cuándo se dice que una ecuación diferencial de primer orden es de variables separables?
- ¿Cómo se imaginan las curvas integrales de una ecuación diferencial de la forma $y'(x) = f(x)$?

ACTIVIDAD 9.3.3.2. Hallen la solución general de la ecuación $y' = 2x$. Grafiquen la familia de soluciones.

ACTIVIDAD 9.3.3.3. Encuentren la solución general $y(x)$ de

$$\left(x^2+1\right) y' = xy$$

ACTIVIDAD 9.3.3.4. Encuentren la ecuación de la curva $y(x)$ que pase por el punto $(1,3)$ y tenga pendiente $y' = y/x^2$ en todos sus puntos. Grafiquen la solución.

ACTIVIDAD 9.3.3.5. Encuentren la ecuación de la curva $y(x)$ que satisface $2xy\,dx - \dfrac{x}{y}\,dy = 0$ y pasa por el punto $(2,1)$. Grafiquen la solución.

9.3.4 Aplicación: modelos de comportamiento exponencial

Ahora que hemos presentado el procedimiento de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, podemos volver al planteo de los problemas mencionados en la introducción 9.3.1. Nos interesa retomar la idea de plantear una ecuación diferencial estableciendo relaciones entre incrementos infinitesimales.

Tanto en el problema de crecimiento de una población de bacterias como en el problema de decaimiento de isótopos radioactivos se trabaja con una cantidad y que depende del tiempo t. En ambos casos se establece que la variación infinitesimal dy se puede considerar instantáneamente proporcional al tiempo infinitesimal transcurrido dt y también proporcional al valor de la cantidad y. En lenguaje matemático, esto se escribe asumiendo que $y(t)$ es una función derivable y que

$$dy = k\,y\,dt$$

Una lectura de esta relación indica que cuanto mayor sea el valor de y, mayor será la variación dy en cierto tiempo dt. También indica que cuanto mayor sea el intervalo de tiempo dt, mayor será la variación dy. La constante k se interpreta como un factor de proporcionalidad; su valor absoluto indica cuánto influyen el valor de y o el tiempo transcurrido dt en la variación de y, en tanto que el signo de k indica si la variación dy es positiva ($y(t)$ es creciente, como la población de bacterias) o si es negativa ($y(t)$ es decreciente, como la cantidad de isótopos radiactivos remanentes). En forma normal, la ecuación se escribe

$$y'(t) = k\,y(t)$$

Este comportamiento se presenta con frecuencia, en distintas aplicaciones. Por supuesto, todos los casos que se rigen por el mismo tipo de ecuación diferencial tienen el mismo tipo de soluciones.

Como aplicación del método de separación de variables, vamos a resolver esta ecuación diferencial y analizar sus soluciones. El trabajo es más sencillo que el de los ejemplos que ya hemos resuelto.

Para proceder, asumamos que para todo instante $y(t) \neq 0$. Las variables se separan fácilmente como

$$\frac{1}{y}\,dy = k$$

y se integran directamente:

$$\int \frac{1}{y}\,dy = k \int dt$$

se resuelve como

$$\ln|y| = kt + C$$

donde C es una constante arbitraria. Podemos despejar la expresión explícita de y(t): en primer lugar, exponenciando ambos miembros despejamos

$$|y| = e^C e^{kt}$$

donde e^C resulta una constante positiva. El valor absoluto nos deja dos posibilidades

$$y(t) = e^C e^{kt} \quad \text{o} \quad y(t) = -e^C e^{kt}$$

El dominio de estas soluciones es el eje real completo. Además, estas funciones nunca se anulan; eso justifica que durante el desarrollo hayamos trabajado con $1/y$.

La posibilidad de que y valga cero en algún momento se trabaja aparte: la ecuación original $y'(t) = k\,y(t) = 0$ admite como solución $y(t) = 0$. Se puede probar que esta es la única solución que faltaba. En conclusión,

> *La ecuación diferencial de primer orden*
> $$y'(t) = k\,y(t)$$
> *tiene como* solución general *a la familia de funciones exponenciales*
> $$y(t) = Ae^{kt}$$
> *donde A toma cualquier valor real (positivo para representar e^C, negativo para representar $-e^C$ o cero para representar $y(t) = 0$). Cada solución de esta familia tiene como dominio todo el eje real.*
> *Por este conjunto de soluciones, se dice que una ecuación diferencial de esta forma describe* **modelos de comportamiento exponencial**.

Más allá del método utilizado, es fácil verificar explícitamente que una función $y(t) = Ae^{kt}$ satisface la ecuación diferencial
$$y'(t) = Ake^{kt} = k\left(Ae^{kt}\right) = k\,y(t)$$
para cualquier constante A.

Es recomendable que identifiquen la forma de la ecuación y que recuerden sus soluciones. Además, recuerden que cuando $k > 0$ las soluciones tienen **crecimiento exponencial** y cuando $k < 0$ las soluciones tienen **decaimiento exponencial**.

Actividades

Actividad 9.3.4.1. Hallen la solución general de la ecuación diferencial $f'(x) = 3f(x)$. Grafiquen algunas soluciones particulares.

Actividad 9.3.4.2. En cinética química, la velocidad instantánea de una reacción $A \to B$, definida como $-\dfrac{d[A]}{dt}$, es proporcional a la concentración molar $[A]$ de la sustancia que reacciona. Llamando $1/\tau$ a la constante de proporcionalidad, se plantea la ecuación diferencial
$$-\frac{d[A]}{dt} = \frac{1}{\tau} \cdot [A]$$
Encuentren una expresión para la concentración molar del reactivo en función del tiempo

Actividad 9.3.4.3. Se analizan datos N versus t medidos en un cultivo de bacterias (M es el número de bacterias, contado al microscopio, y t es el tiempo expresado en horas). Se acepta el modelo exponencial $\dfrac{dN}{dt} = k\,N$, pero no se conoce el valor de k.

Si se observan 10 bacterias al comenzar las medidas ($t = 0$) y se observan 80 bacterias 5 horas después, calculen el valor de k.

Actividad 9.3.4.4. Una población N de animales crece con una rapidez dada por $\dfrac{dN}{dt} = 200+50t$, donde t se mide en años. ¿Cuál es el aumento de la población entre el cuarto y el décimo año?

GeoGebra 9.3.4.5. Para fijar la noción de comportamiento exponencial, grafiquen con GeoGebra la familia de soluciones de $y'(t) = k\,y(t)$:

- Pueden apreciarla con toda generalidad usando deslizadores para introducir los valores de k y de la constante de integración A (los encuentran en un ícono de la barra de herramientas).

- Exploren el significado de A, dejando fijo el valor de k.
- Exploren el significado de k, dejando fijo el valor de A.

9.4 Integrales impropias

Contenido de esta sección: noción de integrales impropias y de convergencia. Integrales impropias por discontinuidades infinitas en el intervalo de integración. Integrales impropias por límites de integración infinitos. Análisis de convergencia por definición. Comportamientos asintóticos y criterios de comparación.

9.4.1 Introducción

La integral de Riemann o integral definida fue construida en el Capítulo 7 para funciones $f(x)$ definidas en intervalos cerrados $[a, b]$. Hemos visto además que la integral de Riemann en un intervalo $[a, b]$ existe al menos para dos tipos de funciones: cuando la función $f(x)$ es continua en todo el intervalo de integración, y también cuando $f(x)$ tiene un número finito de discontinuidades evitables o del tipo salto. Todas las integrales que trabajamos hasta ahora estuvieron planteadas bajo esas condiciones y, como corresponde, dieron resultados finitos.

Sin embargo, al plantear un problema puede ser necesario construir integrales en situaciones más generales, con funciones que presenten discontinuidades del tipo asíntota vertical o en intervalos de longitud infinita. Se las llama **integrales impropias** y, aunque tenga sentido plantearlas, no hay garantía de que el límite de las correspondientes sumas de Riemann exista y sea finito.

Vamos a estudiar dos situaciones particulares que aparecen frecuentemente en las aplicaciones:

1. *Integral de una función $f(x)$ continua en un intervalo semi-cerrado $[a, b)$, cuando $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$, o de una función $f(x)$ continua en un intervalo semi-cerrado $(a, b]$, cuando $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.*
2. *Integral de una función $f(x)$ continua en un intervalo semi-infinito $[a, +\infty)$, o de una función $f(x)$ continua en un intervalo semi-infinito $(-\infty, b]$.*

En el primer caso el motivo que hace impropia a la integral es que el integrando tiene una discontinuidad del tipo asíntota vertical en uno de los bordes del intervalo de integración. En el segundo caso, el motivo que la hace impropia es que el intervalo de integración tiene longitud infinita. Hay situaciones más generales, donde aparecen dos o más veces estos motivos que hacen impropia a la integral. Por ejemplo, la integral de una función en un intervalo semi-infinito $(-\infty, b)$, con asíntota vertical en el borde $x = b$. En esos casos se trabaja separando el intervalo de integración en distintos intervalos parciales, de forma tal que cada intervalo muestre un solo motivo que haga impropia a la integral, y se los analiza por separado. Si tan solo una de las integrales involucradas no existe, entonces se dice que la integral completa no existe. Y si todas las integrales involucradas existen y son finitas, entonces se dice que la integral completa existe y su resultado, usando aditividad respecto del intervalo, es la suma de los resultados obtenidos en cada intervalo parcial.

EJEMPLO 9.4.1.1. En cierto problema se presenta la integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx$$

El integrando, es decir la función $\frac{1}{x}$, tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$ (y no está definido en ese punto). De acuerdo a la breve la lista de integrales impropias que detallamos, debemos partir el intervalo de integración en $x = 0$ y considerar por separado la integración en los intervalos parciales $[-1, 0)$ y (0,1]. Es decir, debemos analizar por separado las integrales

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\, dx \quad \text{y} \quad \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\, dx$$

En cada integral separada vemos que el integrando tiene una asíntota vertical en un solo borde del intervalo (caso 1):

$$\text{en } [-1,0) \text{ encontramos que } \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{y} \quad \text{en } (0,1] \text{ encontramos que } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Corresponde analizar cada integral por separado, con las técnicas que veremos en esta sección. Si las dos integrales quedan bien definidas, podremos usar la aditividad respecto del intervalo y sumar los resultados de cada parte.

Actividades

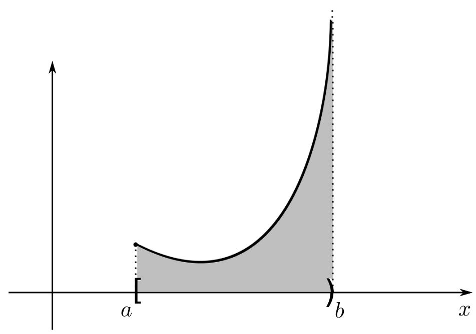
Actividad 9.4.1.1. Para fijar conceptos, elaboren la siguiente pregunta:

- ¿A qué se llama integral impropia? Den dos ejemplos de distintas características.

9.4.2 Integrales impropias en intervalos finitos, por causa de asíntotas verticales

Veamos el caso 1 mencionado en la introducción: integrales de funciones continuas en intervalos finitos semi-cerrados, con límite infinito en el borde abierto.

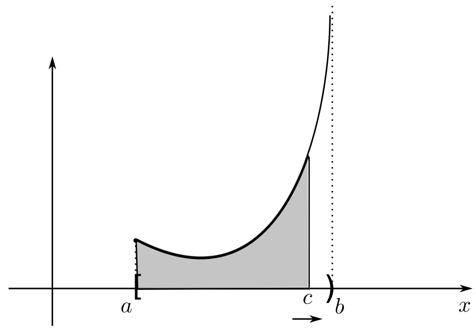
Consideremos un intervalo semi-cerrado $[a,b)$ y una función $f(x)$ continua en $[a,b)$ pero discontinua por izquierda en $x=b$, con $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$.



Cuando la función es positiva podemos interpretar gráficamente que la integral intenta describir el área bajo una curva, en un caso en que la curva tiene una asíntota vertical. Si recordamos los rectángulos de la construcción de Riemann, es sospechoso ver una zona de rectángulos arbitrariamente altos (cuando $x \to b^-$), pero a la vez arbitrariamente angostos (precisamente porque $x \to b^-$) . El área que aporta a la suma de Riemann un rectángulo con base tendiendo a cero y altura tendiendo a infinito plantea una situación indeterminada, del tipo "0 por infinito". Que la integral exista o no exista depende de cada caso. Encontraremos distintos ejemplos donde el área total toma un valor finito, y otros donde tiende a infinito. Una discusión análoga se puede hacer con funciones negativas, usando áreas orientadas.

Para calcular estas integrales se sigue la siguiente estrategia:

- primero se "recorta" el intervalo de integración a un intervalo cerrado $[a,c]$ incluido en $[a,b)$ (es decir con $a<c<b$); con esto se evita acercarse a la asíntota vertical. El valor de c no se especifica, sino que se deja indicado. Como se trata de una función continua en un intervalo cerrado, estamos seguros de que la integral $\int_a^c f(x)\,dx$ existe.
- en segundo lugar se calcula el resultado de la integral $\int_a^c f(x)\,dx$; recuerden que el resultado depende de c, que ha quedado como una variable.
- por último se toma el límite del resultado anterior cuando $c \to b^-$; intuitivamente, se mueve el valor de c para "recuperar" el intervalo $[a,b)$.



Si el límite del último paso existe y es finito, se dice que la integral de $f(x)$ entre a y b **converge**, y que el resultado de la integral es el valor de ese límite.
Si el límite es infinito ($+\infty$ o $-\infty$) se dice que la integral **diverge**, y no se le asigna ningún resultado.

Formalizamos la siguiente definición:

Dada una función $f(x)$ continua en un intervalo semi-cerrado $[a,b)$ con $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$, si existe

$$\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

se dice que la integral impropia **converge** *y se le asigna ese límite como resultado:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

Si dicho límite es infinito, se dice que la integral impropia **diverge** *y no se le asigna resultado.*

Una definición similar se da en el caso de funciones continuas con asíntota vertical en el borde izquierdo de un intervalo $(a,b]$. En este caso se considera la integral en un intervalo recortado $[c,b]$ y el punto c se hace tender hacia a por derecha al final del cálculo. La definición correspondiente es:

Dada una función $f(x)$ continua en un intervalo semi-cerrado $(a,b]$ con $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, si existe

$$\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

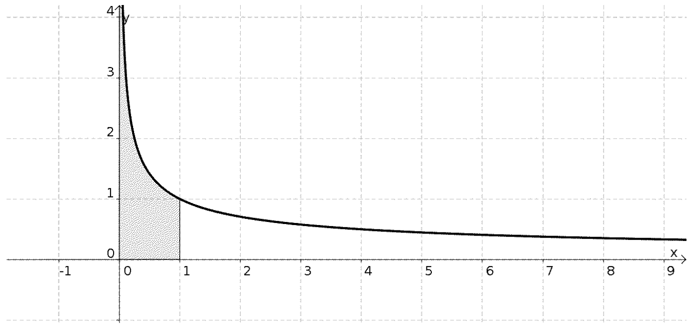
se dice que la integral impropia **converge** *y se le asigna ese límite como resultado:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

Si dicho límite es infinito, se dice que la integral impropia **diverge** *y no se le asigna resultado.*

Veamos los posibles resultados de este procedimiento en ejemplos.

EJEMPLO 9.4.2.1. Estudiemos el área que está "encerrada" entre la gráfica de $f(x) = 1/\sqrt{x}$ y el eje x, entre $x = 0$ y $x = 1$.



La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$, ya que $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ (por eso decimos "encerrada" entre comillas: el "techo" y la "pared izquierda" no llegan a juntarse). En principio no sabemos si el área que buscamos será finita. Siguiendo la definición, calculemos primero la integral $\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ con $0 < c < 1$. Como el integrando es continuo y conocemos una primitiva, usamos la regla de Barrow:

$$\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2x^{1/2}\right]_c^1 = 2\left(1-\sqrt{c}\right)$$

Ahora tomemos el límite de este resultado, para c tendiendo a 0 por la derecha:

$$\lim_{c\to 0^+}\left(\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx\right) = \lim_{c\to 0^+} 2\left(1-\sqrt{c}\right) = 2$$

Como el límite es finito, **la integral impropia converge**. Corresponde asignarle el resultado

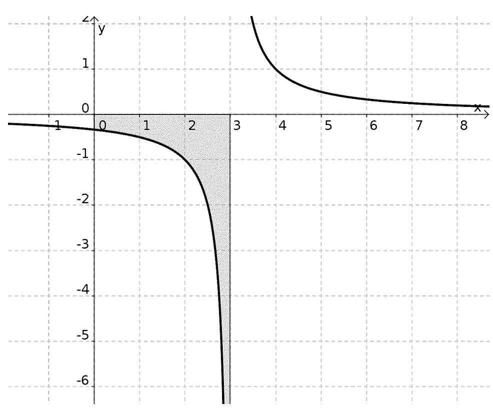
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$$

Observen que la noción de área tiene sentido finito, aunque el "techo" de la región llegue a ser arbitrariamente alto. Se dice que **el área encerrada es finita** (a pesar de que la función no es acotada) y vale 2. Pueden comparar gráficamente el resultado con el área de un rectángulo de base 1 y altura 2.

No siempre el área encerrada será finita. Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 9.4.2.2. Analicemos $\int_0^3 \dfrac{1}{x-3}dx$.

Haciendo una gráfica de $y = \dfrac{1}{x-3}$ vemos que en $[0,3)$ el integrando es negativo y que en $x = 3$ tiene una asíntota vertical con $\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$.



Para estudiar su posible convergencia, debemos considerar un número c entre 0 y 3 y calcular la integral en $[0, c]$ (que existe por ser $\dfrac{1}{x-3}$ continua en ese intervalo)

$$\int_0^c \frac{1}{x-3}dx = [\ln|x-3|]_0^c = \ln|c-3| - \ln|-3| = \ln(3-c) - \ln 3$$

Luego debemos tomar el límite del resultado cuando $c \to 3^-$:

$$\lim_{c\to 3^-}\left(\int_0^c \frac{1}{x-3}dx\right) = \lim_{c\to 3^-}(\ln(3-c) - \ln 3) = -\infty$$

Como este límite es infinito, **la integral impropia diverge**.

Se desprende de los dos ejemplos anteriores que la presencia de una asíntota vertical en un extremo del intervalo de integración no determina el comportamiento: puede causar la divergencia de la integral, o puede dar un resultado convergente.

Recuerden que la presencia de una asíntota vertical en el integrando hace que una integral sea impropia. Si la integral converge o diverge debe ser analizado en cada caso.

Actividades

Actividad 9.4.2.1. Para fijar conceptos, elaboren la siguiente consigna:

- Indiquen cómo se analiza la convergencia de una integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ cuando el integrando $f(x)$ tiene una asíntotas verticales en a.
- Indiquen cómo se analiza la convergencia de una integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ cuando el integrando $f(x)$ tiene dos asíntotas verticales, una en a y otra en b.

Actividad 9.4.2.2. Dadas las siguientes integrales, analicen por qué son impropias. Determinen si convergen o divergen y en el caso en que converjan, calculen a qué valor lo hacen.

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$
- $\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{\sqrt[3]{9-x}}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$

Actividad 9.4.2.3. Determinen si las siguientes integrales son convergentes, separando un intervalo por cada causa que las haga impropias:

- $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$
- $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\,dx$

Para las que sean convergentes, indiquen el resultado.

9.4.3 Integrales impropias de funciones continuas en intervalos semi-infinitos

En esta sección vamos a considerar el caso 2 mencionado en la introducción: integrales impropias de la forma

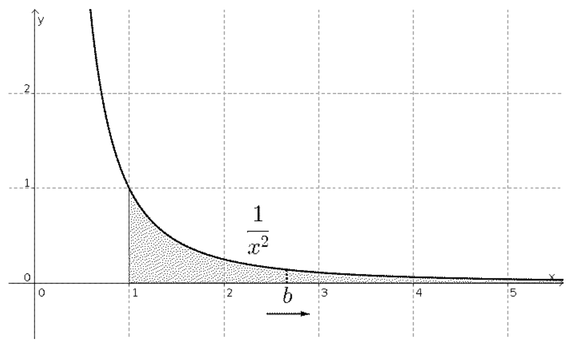
$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

donde $f(x)$ es continua en el intervalo de longitud infinita $[a, +\infty)$. La dificultad de convergencia en este caso es que el intervalo de integración se extiende hasta $+\infty$.

Un ejemplo concreto es la integral

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

donde el integrando es la función $f(x) = 1/x^2$, continua en el intervalo de integración $[1, +\infty)$.



Nos preguntamos si tiene sentido calcular el área "encerrada" entre la curva y el eje x, desde $x = 1$ y hacia la derecha. Decimos "encerrada" entre comillas, porque este dibujo no está acotado: es infinitamente largo hacia la derecha y el "techo" y el "piso" no llegan a juntarse.

Para calcular estas integrales se utiliza la siguiente estrategia:

- trabajamos primero en un intervalo "recortado" $[a, b]$ con $b > a$. Allí existe $\int_a^b f(x)\,dx$ porque el integrando es continuo y el intervalo de integración es cerrado.
- en segundo lugar calculamos la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, cuyo resultado queda expresado en función de b.
- luego tomamos el límite del resultado anterior cuando $b \to +\infty$, para "recuperar" el intervalo $[a, +\infty)$.

Si el límite existe y es finito, se dice que la integral de $f(x)$ entre a y $+\infty$ **converge**, y el valor del límite es el resultado de la integral.
Si el límite es infinito ($+\infty$ o $-\infty$) se dice que la integral **diverge**, y no se le asigna resultado.

Se formaliza esta estrategia con la definición:

Dada una función $f(x)$ continua en un intervalo semi-infinito $[a, +\infty)$, si existe

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

se dice que la integral converge *y se le asigna ese límite como resultado:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Si el límite es infinito, se dice que la integral impropia diverge *y no se le asigna resultado.*

Ejemplo 9.4.3.1. Veamos cómo se analiza la integral impropia $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$. En primer lugar, se calcula sin dificultad

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1 - \frac{1}{b}$$

Luego se calcula el límite de este resultado,

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1$$

Concluimos que la integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, con resultado $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$. El área bajo la curva que graficamos más arriba es finita, y vale 1. Pueden visualizar ese valor comparándolo con el área de un cuadrado de lado 1.

En el ejemplo anterior la función integrando tiende a cero cuando $x \to +\infty$, y la integral resulta convergente. Veamos otro ejempo donde, aunque el integrando tienda a cero cuando $x \to +\infty$, la integral impropia es divergente.

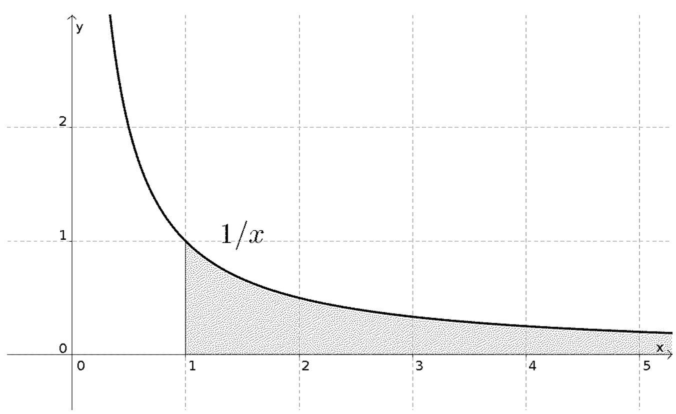
Ejemplo 9.4.3.2. Estudiemos la convergencia de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$. Tenemos que calcular

$$\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_1^b = \ln b$$

y tomar el límite

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty$$

Concluimos que esta integral es divergente.



En los dos ejemplos anteriores la función integrando tiende a cero cuando $x \to +\infty$, por eso las gráficas presentan una asíntota horizontal $y = 0$. Sin embargo, hay una diferencia sustancial en el cálculo del área bajo la curva: en un caso el área es **finita** y en el otro el área es **infinita**.

Por otro lado, es evidente que si el integrando no tiende a cero, entonces la integral impropia hasta $+\infty$ diverge; para funciones continuas y positivas, por ejemplo, el Teorema del Valor Medio para Integrales relacionaría este cálculo con el área de un rectángulo cuya base tiende a infinito y mantiene cierta altura no nula. Se enuncia esta observación como un criterio que permite detectar rápidamente integrales divergentes

Condición necesaria de convergencia.
Si la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge, entonces necesariamente* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *(es decir, tiene asíntota horizontal de ecuación* $y = 0$*).*

De manera similar a lo que discutimos para integrales de la forma $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, se caracterizan integrales impropias en intervalos semi-infinitos hacia la izquierda. Por completitud copiamos la definición correspondiente:

Dada una función $f(x)$ *continua en un intervalo semi-infinito* $(-\infty, b]$*, si existe*

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,x$$

se dice que la integral **converge** *y se le asigna ese límite como resultado:*

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Si el límite es infinito, se dice que la integral impropia **diverge** *y no se le asigna resultado.*

Actividades

Actividad 9.4.3.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes consignas:

- Indiquen cómo se analiza la convergencia de una integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ cuando el integrando $f(x)$ es una función continua.
- En algún caso, ¿pueden afirmar que la integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, sin calcularla?
- Indiquen cómo se analiza la convergencia de una integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ cuando el integrando $f(x)$ es una función continua.

Actividad 9.4.3.2. Identifiquen por qué son impropias las siguientes integrales.

- $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2}\,dx$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2-4}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$

Actividad 9.4.3.3. Sin calcular, analicen si es posible que la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,dx$ converja.

Actividad 9.4.3.4. Determinen si las siguientes integrales son convergentes, separando un intervalo por cada causa que las haga impropias:

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$

Para las que sean convergentes, indiquen el resultado.

ACTIVIDAD 9.4.3.5. El campo magnético B creado por un cable con corriente eléctrica I se calcula con la ley de Biot y Savart, acumulando contribuciones dB provenientes de cada tramo infinitesimal de cable de longitud dx. Probablemente vean en los cursos de Física que el campo magnético creado por una corriente I en un tramo recto de cable de longitud L, a una distancia d del centro del cable, queda expresado por la siguiente integral

$$B = \frac{\mu_0 I d}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+d^2}\right)^3}\, dx$$

donde μ_0 es una constante fundamental.

- Calculen esta integral, con $L = 100$ y $d = 5$.
- Den la expresión del resultado "con letras", dejando L y d como datos.
- Exploren el límite para $L \to +\infty$ y muestren que el campo magnético debido a un cable de longitud infinita es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

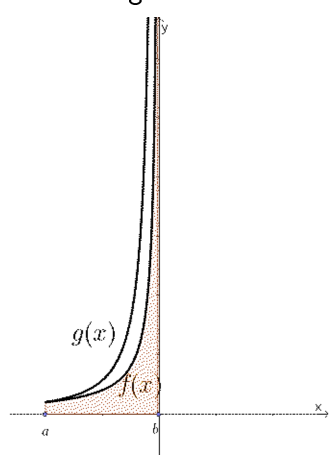
9.4.4 Criterios de convergencia para integrales impropias

El cálculo de integrales impropias por definición involucra la búsqueda de primitivas (con todas las técnicas que hemos visto en el Capítulo 8) y el cálculo de límites (con las técnicas que hemos visto en los Capítulos 2 y 5). Algunas veces es muy complicado hallar una primitiva, incluso sabemos que puede ser imposible hacerlo; además, puede ser trabajoso calcular el límite para recuperar el intervalo de integración. En estas situaciones es importante poder **anticipar si la integral impropia es convergente o divergente**[6].

En esta sección vamos a discutir **criterios de comparación** y **criterios de comportamiento asintótico** que permiten afirmar si una integral impropia converge o diverge, sin calcularla explícitamente.

Comparación de integrales impropias por la presencia de asíntotas verticales

Consideremos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas y positivas en un intervalo $[a, b)$, con asíntota vertical en $x = b$, tales que $f(x) \leq g(x)$ como muestra la figura:



Resulta gráficamente intuitivo que:

- si el área bajo la curva $g(x)$ es finita, entonces el área bajo la curva $f(x)$ necesariamente es finita.
- si el área bajo la curva $f(x)$ es infinita, entonces el área bajo la curva $g(x)$ necesariamente es infinita.

[6]Por ejemplo, si es convergente tiene sentido calcularla al menos en forma aproximada, usando métodos numéricos.

Estas observaciones se pueden probar rigurosamente, usando las propiedades de desigualdades entre integrales en intervalos cerrados y el paso al límite de la definición de integral impropia. Lo enunciamos como la siguiente propiedad:

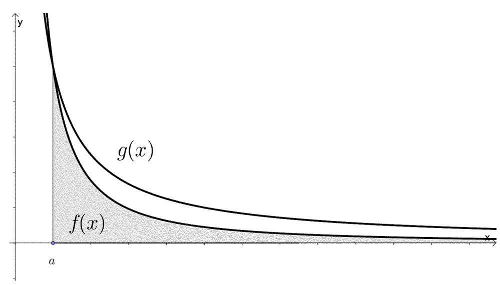
Consideremos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ no negativas y continuas en un intervalo semi-cerrado $[a, b)$, con asíntotas verticales en $x = b$, tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ en $[a, b)$.

- *Si $\int_a^b g(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ también es convergente.*
- *Si $\int_a^b f(x)\,dx$ es divergente, entonces $\int_a^b g(x)\,dx$ también es divergente.*

Un enunciado similar es válido para funciones no negativas y continuas en un intervalo semi-cerrado $(a, b]$, con asíntotas verticales en $x = a$.

Comparación de integrales impropias en intervalos de integración semi-infinitos

Un criterio similar se construye para integrales impropias en intervalos semi-infinitos. Consideremos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas y positivas en un intervalo $[a, +\infty)$, con asíntota horizontal $y = 0$, tales que $f(x) \leq g(x)$ como muestra la figura:



Aquí también resulta gráficamente intuitivo que:

- si el área bajo la curva $g(x)$ es finita, entonces el área bajo la curva $f(x)$ necesariamente es finita.
- si el área bajo la curva $f(x)$ es infinita, entonces el área bajo la curva $g(x)$ necesariamente es infinita.

Lo enunciamos como la siguiente propiedad:

Consideremos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ no negativas y continuas en un intervalo semi-infinito $[a, +\infty)$, tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ en $[a, +\infty)$.

- *Si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ también es convergente.*
- *Si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ es divergente, entonces $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ también es divergente.*

Un enunciado similar es válido para funciones continuas en un intervalo semi-cerrado $(-\infty, b]$.

Comportamiento asintótico y comparación por paso al límite

Los criterios de comparación son sencillos de aplicar, si se compara la función que interesa con una función sencilla de integrar. Usualmente la dificultad consiste en descubrir una comparación adecuada.

En la práctica, podemos construir funciones que tengan el mismo **comportamiento asintótico** que el integrando en cuestión, para comparar sus integrales; el procedimiento se llama **criterio de comparación por paso al límite**. En esta breve presentación trabajaremos siempre con funciones positivas; los resultados se pueden adaptar luego a funciones negativas.

Comparación por paso al límite en presencia de asíntotas verticales.

Cuando $\int_a^b f(x)\,dx$ es impropia por una asíntota vertical en $x=b$ se busca una función sencilla $g(x)$ tal que crezca con el mismo orden de magnitud que $f(x)$ cuando $x \to b^-$, es decir que

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

En este caso, dado que $g(x)$ tiene el mismo comportamiento asintótico que $f(x)$, se puede probar que

$$\text{si } \int_a^b g(x)\,dx \text{ converge, entonces } \int_a^b f(x)\,dx \text{ converge}$$

$$\text{si } \int_a^b g(x)\,dx \text{ diverge, entonces } \int_a^b f(x)\,dx \text{ diverge}$$

Estas afirmaciones enuncian **criterio de comparación por paso al límite** en presencia de asíntotas verticales.

Ejemplo 9.4.4.1. Analicemos la convergencia de la integral

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{x+2}}{4-x^2}\,dx$$

Si escribimos

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{4-x^2} = \frac{\sqrt{x+2}}{2+x} \cdot \frac{1}{2-x} = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \cdot \frac{1}{2-x}$$

vemos que

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{4-x^2} = +\infty$$

y la integral es impropia por una asíntota vertical en $x=2$. Más aún, vemos en detalle que el factor $1/(2-x)$ es el responsable de que esta función tienda a $+\infty$, mientras que el factor restante $1/\sqrt{x+2}$ tiende a $1/2$. La función $g(x) = 1/(2-x)$ nos sirve como comparación. Efectivamente, las dos funciones tienen el mismo comportamiento asintótico porque

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Entonces, la convergencia (o divergencia) de la integral original se corresponde con la convergencia (o divergencia) de $\int_0^2 \frac{1}{2-x}\,dx$. Es sencillo calcular por definición, proponiendo una sustitución $u = 2-x$, que

$$\lim_{b\to 2^-} \int_0^b \frac{1}{2-x}\,dx = -\lim_{c\to 0^+} \int_c^2 \frac{1}{u}\,du = -\lim_{c\to 0^+} (\ln 2 - \ln c) = +\infty$$

En consecuencia, la integral original $\int_0^2 \frac{\sqrt{x+2}}{4-x^2}\,dx$ es divergente.

Para agilizar las comparaciones de integrales impropias por asíntotas verticales, resulta importante recordar patrones de comparación conocidos; mediante una sustitución $u(x)$ adecuada siempre se podrá ubicar la asíntota vertical en $u=0$, por lo que conviene recordar:

- $\int_0^1 \frac{1}{u^p}\,du$ converge cuando $0<p<1$ (por ejemplo, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$ converge)
- $\int_0^1 \frac{1}{u}\,du$ diverge
- $\int_0^1 \frac{1}{u^p}\,du$ diverge cuando $p>1$ (por ejemplo, $\int_0^1 \frac{1}{u^2}\,du$ diverge)
- $\int_0^1 (-\ln(x))\,dx$ converge

Comparación por paso al límite en intervalos semi-infinitos.

Análogamente, cuando $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, con $f(x)$ continua, cumple la condición necesaria de convergencia, se busca una función sencilla $g(x)$ tal que tienda a cero con el mismo comportamiento asintótico que $f(x)$ cuando $x \to +\infty$. Técnicamente se necesita que exista el límite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

y en ese caso se dice que $f(x)$ y $g(x)$ tienen el mismo orden infinitesimal[7] cuando $x \to +\infty$. Dado que $g(x)$ tiende a cero con el mismo comportamiento asintótico que $f(x)$, se puede probar que también sus integrales tienen el mismo comportamiento. Es decir,

$$\text{si } \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ converge, entonces } \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge}$$

$$\text{si } \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ diverge, entonces } \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ diverge}$$

Estas afirmaciones se conocen como **criterio de comparación por paso al límite** en intervalos semi-infinitos. Se demuestra su validez a partir de los criterios de comparación por desigualdad, ya que las definiciones rigurosas de límites se escriben con desigualdades. Pueden consultar algún libro de la bibliografía para justificar la validez de los criterios de comparación por paso al límite.

Ejemplo 9.4.4.2. Consideremos la integral impropia, entre 1 y $+\infty$, de un cociente de polinomios. Por ejemplo,

$$\int_1^{\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x^4+5}\,dx$$

El integrando tiende a cero cuando $x \to +\infty$; como es aconsejable al calcular límites, este resultado se pone en evidencia reescribiendo

$$\frac{2x^2-3x+1}{x^4+5} = \frac{x^2}{x^4}\frac{\left(2-\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{5}{x^4}\right)} = \frac{1}{x^2}\frac{\left(2-\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{5}{x^4}\right)}$$

La función $g(x) = 1/x^2$ que sacamos de factor común nos sirve como comparación. Tiene el mismo comportamiento asintótico que el integrando para x grande, ya que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^2-3x+1}{x^4+5}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2-\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{5}{x^4}\right)} = 2 \neq 0$$

Coloquialmente se suele decir que el integrando original $\frac{2x^2-3x+1}{x^4+5}$ "tiende a cero como $1/x^2$" .

Hecha esta comparación de comportamientos, por el criterio de comparación por paso al límite la integral original converge (o diverge) si $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (o diverge). Ya hemos calculado por definición que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

converge, luego la integral impropia $\int_1^{\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x^4+5}\,dx$ también converge.

Para agilizar las comparaciones por paso al límite resulta importante recordar patrones de comparación conocidos. Es decir, recordar integrales que ya sabemos si son convergentes o divergentes. Cuando $x \to +\infty$, las más frecuentes son:

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ diverge cuando $0 < p < 1$ (por ejemplo, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge)

[7] Esta noción es análoga a la noción de orden de magnitud en el caso de funciones que tienden a infinito.

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ diverge
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, x$ converge cuando $p > 1$ (por ejemplo, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge)
- $\int_1^{+\infty} e^{-x}\, dx$ converge

Como pueden ver, se trata de integrales impropias sencillas de resolver por definición.

Actividades

Actividad 9.4.4.1. Para fijar conceptos, analicen la convergencia de las siguientes integrales impropias estimando comportamiento asintótico del integrando:

- $\displaystyle\int_{10}^{+\infty} \frac{1 - x^2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}\, dx$
- $\displaystyle\int_0^4 \frac{x + 2}{x^2 - 4x + 4}\, dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\text{sen} x}{x^{3/2}}\, dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} dx$
- $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} dx$
- $\int_1^{+\infty} \frac{3}{\mathrm{e}^x + 5} dx$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 0.1}}\, dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1 + x)} dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x - x^4} dx$

CAPÍTULO 10
Aproximaciones polinómicas

Contenidos del capítulo: aproximaciones polinómicas. Polinomios de Taylor. Fórmula de Lagrange para el error de aproximaciones polinómicas.

10.1 Aproximación lineal y aproximaciones polinómicas

Contenidos de esta sección: aproximación lineal y cuadrática. Derivadas superiores. Polinomios de Taylor.

La Naturaleza es extremadamente rica en fenómenos diversos, tanto que necesitamos simplificar lo que observamos para intentar comprenderlo. Para eso se desarrollan modelos: cada modelo toma en cuenta algunas variables que se consideran relevantes, y deja de lado muchos detalles que se espera que no sean tan importantes.

Hay modelos que han funcionado tan bien como para ser ampliamente aceptados, y hoy los conocemos como Leyes de la Naturaleza. Otros modelos describen ciertos fenómenos en forma aproximada. Por ejemplo, las leyes de Gay-Lussac y de Boyle-Mariotte que son válidas solo para los llamados gases ideales.

La noción de **aproximación** viene acompañada por la idea de **error**. Aquí error no significa equivocación: es algo intrínseco a un modelo aceptar que hay un error. No se pretende corregirlo, sino controlar que se mantenga dentro de un **margen de tolerancia** que se considere aceptable.

La noción de modelo aproximado también viene acompañada por la posibilidad de **mejorar la aproximación**. Esto es construir otro modelo más elaborado que asegure menor margen de error. Por ejemplo, hay varios modelos de gases reales, como el de van der Waals, que describen los experimentos mejor que el modelo de gas ideal.

Sin embargo, muchas veces decidimos usar el modelo más sencillo, por simplicidad de cálculo. En estos casos se prefiere tolerar cierto margen de error en los resultados en vez de realizar un cálculo elaborado con resultados más precisos. Probablemente las leyes de gases ideales sean mucho más utilizadas que la ecuación de van der Waals.

En este último capítulo de nuestro curso vamos a discutir la aproximación de funciones: piensen que una cierta función es el resultado predicho por el mejor modelo disponible, pero nos resulta complicada. Entonces decidimos trabajar con una función más sencilla que intenta describir aproximadamente el mismo resultado. Para estimar la calidad de la aproximación nos preocupamos además de estudiar el margen de error introducido por la aproximación.

Las funciones sencillas, apropiadas para hacer aproximaciones, serán polinomios.

En esta sección vamos recordar la aproximación de una función $f(x)$ por la función **lineal** $l(x)$ que describe la recta tangente en dicho punto. Luego, para mejorar la aproximación lineal, introduciremos la aproximación **cuadrática** y los llamados **polinomios de Taylor** de mayor grado.

10.1.1 Aproximación lineal de una función derivable

En el Capítulo 3 hemos aprendido que una función $f(x)$ derivable en un punto x_0 admite recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$. La ecuación de la recta tangente es $y - y_0 = m(x - x_0)$, con $m = f'(x_0)$, y con ella hemos construido la función lineal

$$y = l(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

que llamamos **aproximación lineal de la función $f(x)$ alrededor de x_0**.

Notemos ahora que esta función lineal $l(x)$ tiene las siguientes características en común con la función $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= l(x_0) \\ f'(x_0) &= l'(x_0) \end{aligned}$$

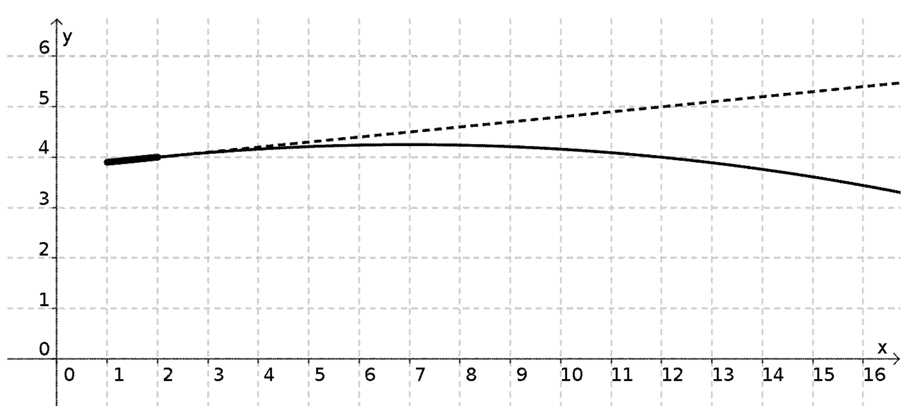
Gráficamente, esto manifiesta que la aproximación lineal y la función pasan por el mismo punto $(x_0, f(x_0))$, y tienen allí la misma pendiente.

Ejemplo 10.1.1.1. Un rifle con mira láser dispara un proyectil. El rayo láser viaja en línea recta, pero la trayectoria del proyectil se curva por causa de la gravedad.

Describamos la situación en un sistema de coordenadas x, y (por simplicidad trabajamos sin unidades, con la posición expresada en metros): el proyectil se dispara en el punto $x_0 = 2$, $y_0 = 4$ y su trayectoria está dada por

$$y = f(x) = \frac{1}{100}\left(384 + 12x - x^2\right)$$

La mira está alineada con el rifle, por lo que la recta que describe el haz de luz es tangente a la trayectoria del proyectil en su punto inicial: pasa por $(2, 4)$ y tiene pendiente $m = f'(2) = 1/10$.



La línea punteada representa el haz de luz. Es el recorrido que "seguiría el proyectil si su trayectoria no se curvara", y es la gráfica de la función lineal

$$l(x) = 4 + f'(2)(x - 2)$$

> Debido a la curvatura de la trayectoria, la aproximación se ve confiable mientras el proyectil no se aleja mucho del punto de partida; la calidad de la aproximación se va deteriorando cuando el proyectil se aleja.

La diferencia entre el valor de la aproximación $l(x)$ y la función $f(x)$ se calcula restando $l(x) - f(x)$. Depende del punto x en que se evalúe y se llama **error de la aproximación**. El error es cero cuando $x = x_0$ y parece pequeño cuando x está cerca de x_0 (es decir, cuando el incremento $x - x_0$ es pequeño). Pero **ninguna cantidad es pequeña o grande en términos absolutos**, siempre depende de la escala con que la comparemos. Lo que corresponde hacer para valorar estas diferencias es compararlas entre sí mediante el cociente

$$\frac{l(x) - f(x)}{x - x_0}$$

En el límite para $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{l(x) - f(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left[-\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f'(x_0) \right] = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Dicho en palabras, y recordando la definición de límite, llegamos a la siguiente conclusión:

> El error cometido en la aproximación lineal $l(x)$ de una función $f(x)$ derivable en un punto x_0 resulta arbitrariamente pequeño respecto del incremento $\Delta x = x - x_0$ de la variable, con la condición de tomar incrementos suficientemente pequeños.

En la sección 10.2 veremos una forma precisa de expresar el error cometido, incluso cuando el incremento en x no es pequeño.

Actividades

Actividad 10.1.1.1. Para fijar conceptos, elaboren la siguiente consigna:

- Discutan si hay alguna diferencia entre aproximación lineal y aproximación diferencial.

Actividad 10.1.1.2. Consideren que $f(x)$ es una función derivable que verifica $f(2) = 1$ y $f'(2) = 3$.

(a) Calculen la aproximación lineal centrada en $x_0 = 2$ y aproximen con ella el valor de $f(2.5)$.

(b) Si x varía desde 2 hasta $2 + \Delta x$, ¿cuánto varía la función, según su aproximación lineal? ¿Pueden relacionar este resultado con el concepto de diferencial df?

10.1.2 Aproximación cuadrática de una función con derivada segunda

Consideremos una función $y = f(x)$ que tenga derivada primera y derivada segunda en un punto x_0 de su dominio. Sabemos que la derivada primera describe la pendiente de la gráfica y que la derivada segunda describe su concavidad, en el punto $(x_0, f(x_0))$. La aproximación lineal que usamos en la sección anterior puede reproducir la pendiente de la gráfica, pero naturalmente no aporta concavidad. Se puede mejorar la aproximación lineal de una función $f(x)$ utilizando un polinomio cuadrático. Intuitivamente, podremos ajustar la curvatura de una parábola para que reproduzca la curvatura de la función $f(x)$. Veamos cómo se la elige.

Aquí es conveniente escribir una función cuadrática $c(x)$ como una función compuesta: un polinomio en el incremento $x - x_0$. Hacemos la propuesta

$$c(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2$$

y buscamos los mejores coeficientes a_0, a_1 y a_2.

El criterio para elegir los coeficientes será que reproduzcan las características del gráfico de $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Para eso calculemos las derivadas

$$c'(x) = a_1 + 2a_2 (x - x_0)$$

$$c''(x) = 2a_2$$

y pidamos que coincidan en x_0 los valores de las funciones $f(x)$ y $c(x)$, los valores de sus derivadas primeras y los valores de sus derivadas segundas:

$$\begin{aligned} c(x_0) &= a_0 = & f(x_0) \\ c'(x_0) &= a_1 = & f'(x_0) \\ c''(x_0) &= 2a_2 = & f''(x_0) \end{aligned}$$

De esta manera la función cuadrática $c(x)$ **pasa por el punto** $(x_0, f(x_0))$ con la **misma pendiente** y la **misma concavidad** que la función $f(x)$ que queremos aproximar.

Los coeficientes a_i se despejan fácilmente en términos de los valores de $f(x_0)$, $f'(x_0)$ y $f'(x_0)$, y la aproximación cuadrática queda escrita como

$$c(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

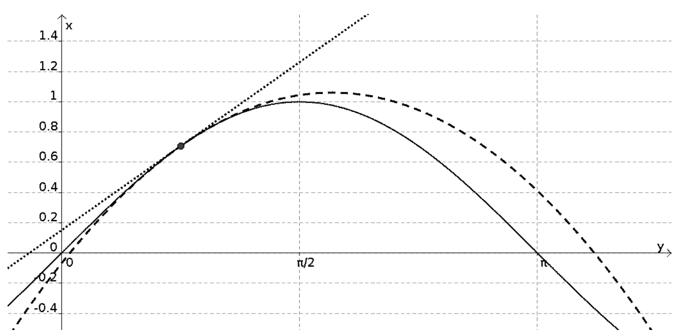
EJEMPLO 10.1.2.1. Apliquemos la aproximación cuadrática a la función $y =$ sen x, eligiendo $x_0 = \frac{1}{4}\pi$.

funciones y derivadas	valores en x_0	coeficientes
$f(x) =$ sen x	$f(\frac{1}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(x) =$ cos x	$f'(\frac{1}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$f''(x) =$ -sen x	$f''(\frac{1}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

La función cuadrática construida es

$$c(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^2$$

En un gráfico, hecho con GeoGebra, podemos ver las gráficas de $y =$ sen x (trazo continuo), su aproximación lineal $l(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$ (trazo punteado) y su aproximación cuadrática (trazo segmentado):



Resulta evidente que la aproximación cuadrática acompaña a la función mejor que la aproximación lineal.

En una aplicación en que la función $f(x_0)$ sea complicada, uno podría reemplazarla por el polinomio cuadrático con cierta confianza, en cierto rango alrededor de x_0. Sin embargo, para no correr riesgos, es necesario estimar el error cometido al usar la aproximación.

Actividades

ACTIVIDAD 10.1.2.1. Para fijar conceptos, elaboren la siguiente pregunta:

- La gráfica de la aproximación cuadrática a una función $f(x)$ centrada en un punto x_0, cuando $f''(x_0) \neq 0$, es una parábola. ¿Qué tiene en común esta parábola con la gráfica de la función $f(x)$?

ACTIVIDAD 10.1.2.2. Construyan la aproximación lineal y cuadrática de la función $f(x) = \sqrt{x}$, centradas en el punto $x_0 = 1$. Grafiquen la función y sus aproximaciones. Utilícenlas para calcular aproximadamente $\sqrt{0.8}$ y $\sqrt{1.1}$.

ACTIVIDAD 10.1.2.3. Consideren la función $f(x) = \ln(x + 1)$.

- Construyan la aproximación lineal y la aproximación cuadrática de esta función, ambas centradas en el punto $x_0 = 0$.
- Grafiquen con GeoGebra la función y sus aproximaciones. Calculen los valores estimados de $\ln(0.9)$ y $\ln(1.2)$ con las aproximaciones lineal y cuadrática.
- Mediante un zoom adecuado, ¿en qué intervalo les parece que cada aproximación es adecuada? ¿Utilizarían alguna de las dos para aproximar $\ln 5$?

10.1.3 Derivadas superiores

Después de ver que la aproximación cuadrática mejora notablemente respecto de la lineal, es natural probar con polinomios de grado tres o más. Dada una función $y = f(x)$ y un punto de interés x_0, la pregunta es: ¿cómo vamos a elegir los coeficientes de esos polinomios? Ya vimos que el valor de la función $f(x_0)$, su pendiente $f'(x_0)$ y su concavidad $f''(x_0)$ se relacionan con los coeficientes independiente, lineal y cuadrático, respectivamente. La respuesta para los demás coeficientes está en las **derivadas superiores** de $f(x)$.

Así como introdujimos en el capítulo 4 el concepto de derivada segunda para caracterizar el crecimiento de la función derivada primera, se pueden definir derivadas de mayor orden.

Consideremos una función $y = f(x)$ con función derivada primera y función derivada segunda bien definidas en un entorno de x_0. Si la función $f''(x)$ es derivable, su derivada se anota $f'''(x)$ o $f^{(3)}(x)$ y se llama **derivada tercera** de $f(x)$. La derivada tercera, entonces, describe el crecimiento de $f''(x)$, es decir el ritmo de cambio de la concavidad de $f(x)$.

EJEMPLO 10.1.3.1. Hagamos un cálculo explícito con $f(x) = \ln(x + 1)$, definido en $(-1, +\infty)$:

- $f'(x) = 1/(x + 1)$
- $f''(x) = -1/(x + 1)^2$
- $f^{(3)}(x) = 2/(x + 1)^3$

Observen que el dominio de estas derivadas es $(-1, +\infty)$, a pesar de que sus expresiones se puedan evaluar incluso para $x < -1$.

De la misma manera, si $f^{(3)}(x)$ es una función derivable, se llama **derivada cuarta** de $f(x)$ a $f^{(4)}(x) = \left(f^{(3)}(x)\right)'$. En el ejemplo anterior no hay ningún impedimento para volver a derivar, obtenemos $f^{(4)}(x) = -2.3/(x + 1)^4$ y podemos seguir derivando. Mientras la derivada de cierto orden se pueda calcular, y volver a derivar, podemos hablar de la derivada del orden siguiente. Así se llama **derivada n-ésima** de $f(x)$, y se anota $f^{(n)}(x)$, a la derivada de la función n veces.

Las derivadas de orden 3 o más describen alguna característica geométrica del gráfico de la función. Estas características no tienen un nombre tan establecido como pendiente y concavidad, pero dan información sobre el gráfico. Por convención, $f^{(0)}(x)$ designa a la función $f(x)$ "sin derivar".

Observación: la notación de Leibnitz para la derivada n-ésima es

$$\frac{d^n f}{dx^n}$$

que se lee **derivada *n*-ésima de f respecto de x *n* veces**. Recuerden que la notación $\dfrac{d^n f}{dx^n}$, n no significa una potencia, sino cuántas veces hemos de derivar. No se debe confundir con la potencia n-ésima de la derivada primera, que se anota $\left(\dfrac{df}{dx}\right)^n$.

Actividades

ACTIVIDAD 10.1.3.1. Calculen las derivadas de todo orden de:

- e^x
- $\ln(x+1)$
- sen$x$
- $\cos x$

(sugerencia: calculen varios órdenes, hasta intuir cómo son las derivadas siguientes; se puede formalizar el cálculo usando Inducción Completa)

10.1.4 Polinomios de Taylor

La generalización de las aproximaciones lineal y cuadrática a polinomios de mayor orden se puede hacer sistemáticamente cuando existen las derivadas superiores.

Consideremos una función $y = f(x)$ que tenga derivada al menos hasta orden n en un punto x_0 de su dominio. Una aproximación polinómica de grado n se puede proponer como un polinomio compuesto, donde aparezcan potencias del incremento $x - x_0$:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

Esta propuesta tiene $n + 1$ coeficientes a_k. Estos coeficientes quedarán determinados por $n + 1$ condiciones, que siguiendo el razonamiento anterior consisten en pedir que el valor de $P_n(x)$ y de sus n primeras derivadas, evaluados en x_0, coincidan con los respectivos valores de $f(x)$ y de sus n primeras derivadas. Las funciones derivadas de $P_n(x)$ son

$$\begin{array}{rcl} P_n'(x) & = & a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} \\ P_n''(x) & = & 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} \\ & \cdots & \\ P_n^{(n)}(x_0) & = & n.(n-1).\cdots.2.a_n \end{array}$$

Luego, al evaluar estas derivadas en x_0 podemos igualarlas a las correspondientes derivadas de $f(x)$ para obtener

$$\begin{array}{rcl} P_n(x_0) & = a_0 = & f(x_0) \\ P_n'(x_0) & = a_1 = & f'(x_0) \\ P_n''(x_0) & = 2a_2 = & f''(x_0) \\ P_n^{(3)}(x_0) & = 3.2.a_3 = & f^{(3)}(x_0) \\ & \cdots & \\ P_n^{(n)}(x_0) & = n.(n-1).\cdots.2.a_n = & f^{(n)}(x_0) \end{array}$$

Aquí es útil usar la notación factorial, anotando $k! = k.(k-1).\cdots.2.1$, y en especial $0! = 1$. Cada coeficiente a_k se puede despejar en términos de la derivada k-ésima de $f(x)$ **evaluada** en x_0 como

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

Observación: es importante recalcar que los coeficientes del polinomio así construido son **números**; no son las funciones derivadas sino los valores que toman las funciones derivadas en el punto x_0.

El polinomio construido con este criterio se llama **polinomio de Taylor** de grado n centrado en x_0:

Dada una función $y = f(x)$ que tenga derivada al menos hasta orden n en un punto x_0 de su dominio, se llama **polinomio de Taylor de grado n centrado en x_0** *al polinomio en la variable x dado por*

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(x_0)\,(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n$$

Noten que los polinomios de Taylor de grado uno y dos son simplemente las aproximaciones lineal y cuadrática que ya hemos visto antes. Si calculamos el polinomio de Taylor para un cierto grado pero luego queremos un grado mayor, no hay que cambiar los coeficientes ya calculados: basta con agregar más términos hasta llegar al grado deseado.

Observaciones:

- el grado de un polinomio está dado por la potencia más alta de x que tenga coeficiente distinto de cero. Si encontramos que $f^{(n)}(x_0) = 0$, el grado de $P_n(x)$ será menor que n. En este texto llamaremos genéricamente polinomio de Taylor de grado n a esta construcción, aunque sea de menor grado.
- cuando se toma $x_0 = 0$, los polinomios de Taylor se llaman también polinomios de Maclaurin.

Ejemplo 10.1.4.1. Un ejemplo muy usado en la práctica, que conviene recordar, es el desarrollo de polinomios de Taylor de $f(x) =$ sen x centrados en $x_0 = 0$.

Calculemos las derivadas superiores de sen x y sus valores en $x_0 = 0$:

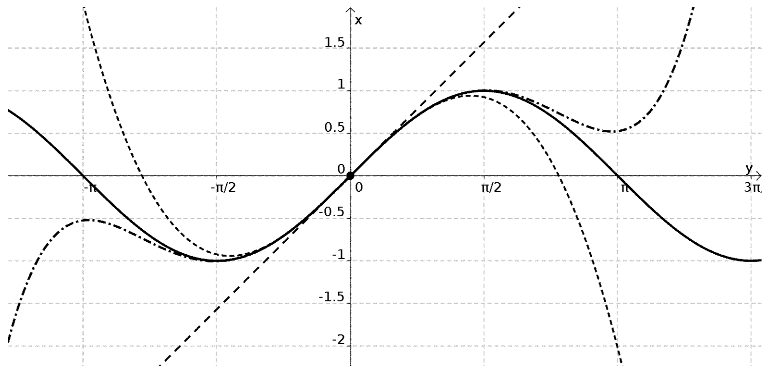
funciones	valores en x_0	coeficientes
$f(x) = \text{sen}x$	$f(0) = 0$	$a_0 = 0$
$f^{(1)}(x) = \text{cos}x$	$f^{(1)}(0) = 1$	$a_1 = 1$
$f^{(2)}(x) = \text{-sen}x$	$f^{(2)}(0) = 0$	$a_2 = 0$
$f^{(3)}(x) = \text{-cos}x$	$f^{(3)}(0) = -1$	$a_3 = -\frac{1}{3!}$
$f^{(4)}(x) = \text{sen}x$	$f^{(4)}(0) = 0$	$a_4 = 0$

Noten que en este ejemplo la derivada cuarta $f^{(4)}(x)$ es igual a la función $f(x)$. Al calcular la derivada quinta encontramos $f^{(5)}(x) = (\text{sen}x)' = \cos x = f^{(1)}(x)$, que es la derivada primera. Y a partir de allí las derivadas siguientes van repitiendo estos cuatro pasos, por lo que podemos expresar cualquier derivada n-ésima. Al evaluarlas, todas las derivadas de orden par son cero, y las de orden impar son alternadamente 1 y -1.

Los polinomios de Taylor de $f(x) =$ sen x centrados en $x_0 = 0$ tienen solamente potencias impares, y se pueden escribir para cualquier grado:

$$P_{2n+1}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

En un gráfico hecho con GeoGebra podemos apreciar cómo mejora la aproximación de sen$x$ al aumentar el grado del polinomio: mostramos la función, $P_1(x)$, $P_3(x)$ y $P_5(x)$:



El polinomio $P_5(x)$, aparentemente, es muy buena aproximación para sen x en todo el primer cuadrante (esta observación es intuitiva; rigurosamente, hay que fijar un criterio antes de decidir si una aproximación es "buena").

Hay ciertas funciones que utilizaremos con más frecuencia, porque son útiles en otras materias y porque tienen polinomios de Taylor sencillos de recordar. Una de ellas es $f(x) = \text{sen} x$, desarrollada en torno a $x_0 = 0$ en este ejemplo. Otras son $\cos x$, e^x, $\ln(1+x)$ y $(1+x)^r$, todas en torno a $x_0 = 0$; proponemos su análisis en la ejercitación.

Actividades

ACTIVIDAD 10.1.4.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes preguntas:

- Ajustando los coeficientes de un polinomio genérico podemos lograr que su gráfica pase por cierto punto (x_0, y_0) y podemos fijar el valor de algunas derivadas en ese punto. Si el polinomio es de grado n, ¿hasta qué orden se puede elegir el valor de sus derivadas en x_0?
- ¿Pueden imaginar algún caso donde una aproximación polinómica de grado arbitrariamente alto no logre reproducir las características de la función que se desea aproximar? (sugerencia: consideren alguna función con discontinuidades cerca del punto en torno al cual se trabaja la aproximación).

ACTIVIDAD 10.1.4.2. Escriban el polinomio de Taylor de grado n (genérico) en torno a $x = 0$ para las siguientes funciones:

- $f(x) = \ln(x+1)$ deberán llegar a la expresión siguiente: $P_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$.
- $f(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \cos x$
- $f(x) = \frac{1}{1+x}$

GEOGEBRA 10.1.4.3. GeoGebra tiene un comando específico para calcular polinomios de Taylor. Si tienen definida una función $f(x)$, el comando para calcular el polinomio centrado en un punto x_0 y orden n se escribe

```
PolinomioTaylor[f,x0,n]
```

Grafiquen en GeoGebra $\text{sen}\, x$ y las funciones dadas en el ejercicio 10.1.4.2, junto con sus primeros polinomios de Taylor en las cercanías de $x_0 = 0$.

10.1.5 Cálculos numéricos aproximados

Un primer uso de los polinomios de Taylor es la evaluación aproximada de expresiones numéricas.

EJEMPLO 10.1.5.1. Calculemos aproximadamente el valor de $\sqrt{9.3}$.

En primer lugar construimos una función $f(x)$ tal que al evaluarla en cierto valor de x_1 represente este cálculo. En este caso es apropiado definir

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Para construir polinomios de Taylor elegimos $x_0 = 9$, porque es sencillo calcular $f(9) = \sqrt{9} = 3$ y porque $x_1 = 9.3$ está cerca de $x_0 = 9$. La cantidad que queremos aproximar es entonces

$$f(9.3) = \sqrt{9.3}$$

Intentemos una aproximación de grado $n = 2$. Para eso calculamos las derivadas de $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{1/2} \\ f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2} \\ f''(x) &= -\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^{-3/2} \end{aligned}$$

y los coeficientes del polinomio de Taylor de grado 2:

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{0!}f(9) = && 3 \\ a_1 &= \tfrac{1}{1!}f'(9) = && \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ a_2 &= \tfrac{1}{2!}f''(9) = - && \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{1}{27} = -\frac{1}{216} \end{aligned}$$

El polinomio de Taylor buscado es

$$P_2(x) = 3 + \frac{1}{6}(x-9) - \frac{1}{216}(x-9)^2$$

El valor aproximado de $\sqrt{9.3} = f(9.3)$ está dado por el polinomio $P_2(x)$ evaluado en $x_1 = 9.3$:

$$P_2(9.3) = 3 + \frac{1}{6}\cdot 0.3 - \frac{1}{216}0.3^2 = 3.0495833\cdots$$

Pueden comparar este resultado con el de una calculadora (que también es aproximado, pero está programado para los decimales mostrados en la pantalla sean correctos).

EJEMPLO 10.1.5.2. Calculemos ahora $\sqrt{8.5}$ con el mismo método.

Necesitamos evaluar la misma función $f(x) = \sqrt{x}$, ahora en $x_1 = 8.5$. Luego, el mismo polinomio $P_2(x)$ calculado en el ejemplo anterior nos dará un valor aproximado al calcular

$$P_2(8.5) = 3 + \frac{1}{6}\cdot(-0.5) - \frac{1}{216}(-0.5)^2 = 3.0821759\cdots$$

EJEMPLO 10.1.5.3. Siguiendo con los ejemplos anteriores, si necesitamos mejorar la precisión de la aproximación podemos intentar con un polinomio de grado 3. Para eso basta agregar un término al polinomio $P_2(x)$. Necesitamos la derivada tercera de $f(x) = \sqrt{x}$,

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$$

y el coeficiente

$$a_3 = \frac{1}{3!}f^{(3)}(9) = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{243} = \frac{1}{3888}$$

El polinomio de Taylor de grado 3 es

$$P_3(x) = 3 + \frac{1}{6}(x-9) - \frac{1}{216}(x-9)^2 + \frac{1}{3888}(x-9)^3$$

Usando este polinomio, el valor aproximado de $\sqrt{9.3}$ resulta $3.0495902\cdots$ (que difiere del anterior a partir de la quinta cifra decimal).

En los ejemplos hemos hablado de cálculos aproximados, pero no discutimos todavía cuál es el **margen de error** de los resultados encontrados. Para saber cuánto confiar en estas aproximaciones, necesitamos estudiar de alguna manera la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado. Ese es el tema de la próxima sección.

Actividades

ACTIVIDAD 10.1.5.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes preguntas:

- Si una calculadora muestra 10 dígitos en la pantalla (incluyendo cifras enteras y decimales), ¿cuál será el margen de tolerancia con que trabajó su programador para el cálculo del sen(x)?
- Si un cálculo numérico aproximado con polinomios no es satisfactorio, ¿cómo piensan que se puede disminuir el margen de error?

ACTIVIDAD 10.1.5.2. Encuentren el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ centrado en $x_0 = 3$. Utilícenlo para aproximar $(4.1)^{-1/2}$. Antes de analizar el error cometido, podrían comparar el resultado aproximado con el de una calculadora.

Repitan el cálculo con el polinomio de Taylor de grado 3, y si tienen paciencia intenten también con el polinomio de grado 4. ¿Mejora la aproximación al resultado de la calculadora?

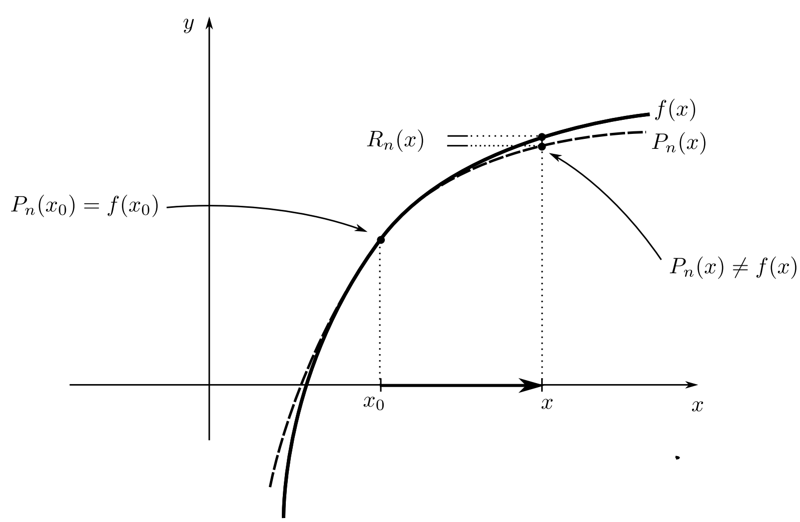
10.2 Margen de error en las aproximaciones polinómicas. Aplicaciones.

Contenidos de esta sección: resto de una aproximación. Fórmula de Lagrange para el resto. Estimación del error máximo cometido en una aproximación polinómica. Aplicaciones de los polinomios de Taylor.

En la sección anterior vimos la construcción de aproximaciones polinómicas, con el objetivo de reemplazar una función "difícil" por un polinomio. Para decidir si se puede confiar en esas aproximaciones es necesario estudiar cuidadosamente el error introducido por ellas.

10.2.1 Resto de una aproximación polinómica y margen de error

Revisemos qué sucede cuando queremos aproximar el valor de una función $f(x)$ en un punto $x \neq x_0$ mediante su polinomio de Taylor de grado n, centrado en x_0. Para controlar la calidad de la aproximación es necesario estudiar la diferencia entre el valor de la función y el valor de la aproximación, en el punto x.



Esta diferencia se llama **resto** de la aproximación. Para recordar que este resto se refiere al polinomio de Taylor de grado n vamos a anotarlo

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Otra manera de decir lo mismo es que la función se puede recuperar **exactamente** como

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

El polinomio es la parte que conocemos, y el resto es la parte que no conocemos. Cuando usamos un polinomio de Taylor para aproximar $f(x)$, lo que hacemos es retener el polinomio y **despreciar el resto**. Se suele escribir

$$f(x) \approx P_n(x)$$

con lo cual estamos cometiendo un **error** igual al resto despreciado. Debe quedar claro que, una vez fijados el punto x_0 y del grado n del polinomio, el valor del resto depende del punto x en que se evalúa la aproximación.

La calidad de una aproximación se evalúa con respecto a un criterio de **tolerancia**. Según la importancia del cálculo, primero hay que fijar un margen de error aceptable, expresado por un número positivo que llamaremos ε. Luego se debe controlar que el error cometido no sea mayor que ε (si fuera positivo) ni menor que $-\varepsilon$ (si fuera negativo). En términos del resto de la aproximación polinómica, la condición de tolerancia se escribe como una cota para el valor absoluto del error,

$$|R_n(x)| < \varepsilon$$

Actividades

ACTIVIDAD 10.2.1.1. Para fijar conceptos, elaboren las siguientes preguntas:

- Cuando uno decide trabajar con un cálculo aproximado, ¿espera conocer exactamente el error cometido?
- Cuando uno decide trabajar con un cálculo aproximado, ¿debería preocuparse por el error cometido?
- Si no se conoce exactamente el error cometido, ¿qué tipo de garantía se le asigna al resultado aproximado?

10.2.2 Fórmula de Lagrange para el resto

Existen varias formas de representar el resto de las aproximaciones polinómicas; vamos a presentar una de ellas, conocida como fórmula de Lagrange. La enunciamos (sin demostración) en el siguiente teorema:

Teorema de Taylor.
Si $f(x)$ es una función derivable al menos hasta orden $n+1$ en un intervalo (a,b) que contiene al punto x_0, y si $P_n(x)$ es su polinomio de Taylor de grado n centrado en x_0, entonces para cada x perteneciente a (a,b) se puede expresar

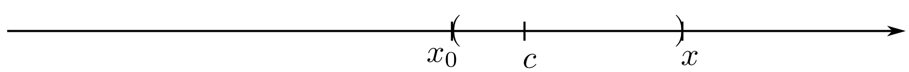
$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\,(x-x_0)^{n+1}$$

donde c es un número entre x_0 y x. La expresión

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\,(x-x_0)^{n+1}$$

se conoce como fórmula de Lagrange para el resto.

Como pueden sospechar, la demostración de la fórmula de Lagrange hace uso del Teorema del Valor Medio. Igual que en aquel caso, la fórmula de Lagrange no nos dice el valor de c pero nos da un intervalo al que c pertenece.



Caracterización infinitesimal del error

El Teorema de Taylor nos permite estudiar en detalle el error $f(x) - P_n(x)$ cuando $x \to x_0$. Bajo las hipótesis del teorema, siendo $f(x)$ derivable en x_0, sabemos que es continua. Entonces, es inmediato ver que el error tiende a cero cuando $x \to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - P_n(x)) = f(x_0) - P_n(x_0) = 0$$

Es decir, el error es una cantidad infinitesimal en x_0. Podemos hacer más: para apreciar qué tan pequeño es el error conviene compararlo con la distancia entre x y x_0, que también es infinitesimal en x_0, y hallar el orden relativo de estos infinitésimos (como discutimos en la sección 2.2.3). Para eso estudiamos

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\,(x-x_0)$$

Dado que c está entre x y x_0, en este límite $c \to x_0$. Si la derivada $f^{(n+1)}(x)$ es continua en x_0, vemos que en el límite $f^{(n+1)}(c) \to f^{(n+1)}(x_0)$. Como además hay un factor $(x-x_0)$ que tiende a cero, obtenemos que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Este límite indica que el error de la aproximación polinómica $f(x) \approx P_n(x)$ es un infinitésimo de mayor orden que el incremento $x - x_0$de la variable elevado a la n.

Podemos afirmar:

Si $f(x)$ es una función derivable al menos hasta orden $n+1$ en un intervalo (a, b) que contiene al punto x_0 y la derivada $f^{(n+1)}(x)$ es continua en x_0, entonces la diferencia $f(x) - P_n(x)$ entre la función y su polinomio de Taylor de grado n centrado en x_0 es un infinitésimo de mayor orden que $(x - x_0)^n$.
En palabras, se suele decir que cuando $x \to x_0$ el error $f(x) - P_n(x)$ tiende a cero más rápido que $(x - x_0)^n$.

Actividades

Actividad 10.2.2.1. Para fijar conceptos, elaboren la siguiente consigna:

- Escriban el polinomio de Taylor de grado 1 de una función derivable, en torno a un punto x_0, y la fórmula de Lagrange para el resto asociado a la aproximación $f(x) \approx P_1(x)$ en un punto x_1. Comparen la fórmula del resto con el Teorema del Valor Medio.

Actividad 10.2.2.2. Estimen el orden infinitesimal del error introducido por la aproximación diferencial. Es decir, apliquen la discusión de esta sección al planteo de la sección 3.2.1.

Actividad 10.2.2.3. Retomen la actividad 10.1.5.2, donde calcularon distintas aproximaciones numéricas al valor de $1/\sqrt{4.1}$. Usando la fórmula de Lagrange para el resto, escriban una expresión para el resto despreciado en cada aproximación.

10.2.3 Análisis del margen de error

La fórmula de Lagrange (cuando se cumplen las hipótesis del Teorema de Taylor) nos permite escribir el resto de una aproximación polinómica en términos de un número desconocido c, dentro de cierto intervalo. Su utilidad práctica no reside en calcular el valor de c y luego calcular el resto, sino en que permite estudiar los **posibles valores del resto** según el intervalo en que puede estar el número c.

Supongamos que se usa un polinomio de Taylor $P_n(x)$, centrado en un punto x_0, para aproximar una función $f(x)$ en un punto x_1. Usando la fórmula de Lagrange, vamos a controlar los posibles valores del valor absoluto del error

$$|R_n(x_1)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\, (x_1 - x_0)^{n+1} \right|$$

sabiendo que c se encuentra entre x_0 y x_1. Para eso basta encontrar el máximo absoluto de esta expresión como función de c (con las técnicas trabajadas en el Capítulo 4).

Ejemplo 10.2.3.1. Utilicemos un polinomio de Taylor de grado $n = 4$ para aproximar el valor de $\ln(1.2)$.

Vamos a definir la función $f(x) = \ln(1 + x)$, de manera que

$$\ln(1.2) = \ln(1 + 0.2) = f(0.2)$$

La construcción del polinomio de Taylor de grado 4 de $\ln(1 + x)$ alrededor de $x_0 = 0$ está propuesta entre los ejercicios de la sección 10.1.4. Habrán encontrado

$$P_4(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$$

y también habrán calculado la derivada siguiente, $f^{(5)}(x) = 4!\,(1 + x)^{-5}$.

Con esos elementos puede escribir la aproximación en $x_1 = 0.2$,

$$\ln(1.2) = f(0.2) \approx P_4(0.2) = 0.182266\cdots$$

y estudiar el valor absoluto del resto

$$|R_4(0.2)| = \frac{1}{5!}|f^{(5)}(c)|\,|0.2-0|^5 = \frac{1}{5!}4!\,|1+c|^{-5}\,(0.2)^5 = \frac{1}{15625}\ (1+c)^{-5}$$

con c en el intervalo $[0, 0.2]$. Viendo que $1+c>0$ en este intervalo, ya reemplazamos$|1+c|^{-5} = (1+c)^{-5}$.

Encontrar ahora el mayor valor que puede tomar esta expresión, como función de c y en un intervalo cerrado, es un problema de extremos que aprendimos a resolver el Capítulo 4. Calculamos la derivada de $(1+c)^{-5}$ respecto de c, obtenemos $-5(1+c)^{-6}$ y vemos que es negativa para cualquier c entre $[0, 0.2]$; entonces la expresión es decreciente y como es continua en $[0, 0.2]$ podemos asegurar tiene un máximo en el borde izquierdo, $c = 0$. Es decir, su valor en todo el intervalo $[0, 0.2]$ es siempre menor que en $c = 0$:

$$(1+c)^{-5} < (1+0)^{-5} = 1$$

Concluimos que el error de la aproximación está acotado por

$$|R_4(0.2)| = \frac{1}{15625}(1+c)^{-5} < \frac{1}{15625} = 0.000064$$

Con esta información se suele escribir el resultado junto con su margen de error como

$$\ln(1.2) = 0.182266 \pm 0.000064$$

Esta notación es la misma que se usa para informar un resultado experimental aclarando el margen de error estimado.

Es interesante que averigüen el valor de $\ln(1.2)$ que les da una calculadora, y vean que es consistente con el margen de error que pudimos establecer.

En este ejemplo hemos utilizado la fórmula de Lagrange para controlar el error de aproximación de un polinomio de Taylor de grado fijo. Observen que no determinamos un valor para el número c, ni determinamos el valor del resto $R_4(0.2)$. Lo que hicimos fue acotar los posibles valores de la expresión del resto.

Una situación frecuente en el análisis de errores nos plantea decidir qué grado de aproximación es el apropiado si la tolerancia ε al error ya está prefijada. En ese caso, podemos proponer una aproximación de cierto grado y controlar si es aceptable; si no lo es, aumentamos el grado (agregando un término al polinomio anterior) y volvemos a controlar. Aunque no hay garantía, uno espera encontrar un grado apropiado para cada tolerancia ε dada.

Ilustremos esta situación con la misma función del ejemplo anterior.

Ejemplo 10.2.3.2. Supongamos que se desea aproximar el valor de $\ln(1.2)$ mediante un polinomio de Taylor y se necesita cometer un error menor a 0.0001.

Utilicemos la función $f(x) = \ln(1+x)$ y su polinomio de Taylor de grado n alrededor de $x_0 = 0$. Como en el ejemplo anterior, corresponde elegir $x_1 = 0.2$. El trabajo será ahora decidir cuál es el menor grado del polinomio que garanticen la cota dada para el error.

En el caso de $f(x) = \ln(1+x)$ la derivada $f^{(n+1)}(x)$ se puede expresar para cualquier $n > 1$ (como habrán hallado en la ejercitación de la sección 10.1.4) como

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-(n+1)}$$

Con esto, la expresión del valor absoluto del error para cada n es:

$$|R_n(0.2)| = \frac{1}{(n+1)!}n!(1+c)^{-(n+1)}\,(0.2-0)^{n+1}$$

con c en el intervalo $[0, 0.2]$.

Analizando la función $(1+c)^{-(n+1)}$ vemos que resulta continua y decreciente en $[0, 0.2]$, por lo que su máximo se encuentra en $c=0$ y vale $(1+0)^{-(n+1)}=1$. El margen de error, para cada n, está dado por

$$|R_n(0.2)| = \frac{1}{n+1}(1+c)^{-(n+1)}0.2^{n+1} < \frac{1}{n+1}0.2^{n+1}$$

Ahora tenemos que elegir n para que este margen sea menor que la tolerancia solicitada,

$$\frac{1}{n+1}0.2^{n+1} < 0.0001$$

No es sencillo despejar n de esta desigualdad, resulta más práctico probar con diferentes valores de n hasta encontrar el primero que verifique esta condición. En este caso

si $n=3$, $|R_3(0.2)| = \frac{1}{4}0.2^4 = 0.0004$ y el margen no es satisfactorio

si $n=4$, $|R_4(0.2)| = \frac{1}{5}0.2^5 = 0.000064 < 0.0001$ sí resulta satisfactorio.

Es decir, hace falta utilizar el polinomio de Taylor de grado 4 para asegurar que el error cometido al aproximar $\ln(1.2)$ sea menor que 0.0001.

Otras funciones para las cuales de pueden expresar las derivadas de todo orden n son sen$x$, $\cos x$, e^x y $(1+x)^r$. Es recomendable recordar los primeros términos de sus polinomios de Maclaurin (o de Taylor, centrados en $x_0=0$).

Actividades

Actividad 10.2.3.1. Vuelvan a las actividades 10.1.5.2 y 10.2.2.3, donde calcularon distintas aproximaciones numéricas al valor de $1/\sqrt{4.1}$ y escribieron expresiones para el resto. Encuentren ahora el margen de error que pueden asignar a cada aproximación.

Actividad 10.2.3.2. Consideren el polinomio de grado n de Maclaurin de $f(x) = \mathrm{e}^x$. A partir de la expresión del resto $R_n(x)$, determinen qué grado del polinomio hay que utilizar para aproximar $\sqrt{\mathrm{e}}$ con un error menor a 0.001.

Actividad 10.2.3.3. Construyan el polinomio de Taylor de grado 5 de la función sen(x), centrado en $x_0=0$ (que ya hemos graficado en el ejemplo 10.1.4.1).

Si lo utilizan para evaluar aproximadamente el seno de distintos ángulos del primer cuadrante, ¿cómo asignarían un margen de error seguro a sus resultados?

Con este análisis, discutan la afirmación que hicimos en ese ejemplo: "El polinomio $P_5(x)$, aparentemente, es muy buena aproximación para sen x en todo el primer cuadrante".

10.2.4 Aplicaciones

La aproximación de funciones por polinomios tiene muchas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, al discutir un modelo pueden escuchar: "proponemos un polinomio cuadrático"; otras veces se trabaja con una aproximación lineal, y cuando no parece suficiente se dice: "lo corregimos con un término cuadrático". Aunque no se haga un tratamiento riguroso, este tipo de afirmaciones tiene sentido porque existe un marco teórico que las respalda, y condiciones para discutir si la aproximación es válida. Con la teoría que hemos discutido en esta clase podrán analizar el resto de esas aproximaciones, y controlar rigurosamente el error cometido.

Les proponemos como cierre dos aplicaciones que se relacionan con otros temas de nuestro curso: cálculo de límites y cálculo aproximado de integrales.

Ejemplo 10.2.4.1. ***Cálculo de límites indeterminados***

Vamos a explorar el

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}$$

usando una representación del numerador en términos de un polinomio de Taylor. El polinomio de grado 2, centrado en $x_0 = 0$ de $\cos x$ es $P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$. Usando la fórmula de Lagrange podemos representar **exactamente**

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + R_2(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{R_2(x)}{x^2}$$

Además, como $\cos x$ tiene derivada tercera continua, podemos usar que $R_2(x)$ es un infinitésimo de mayor orden que x^2. Eso nos permite resolver el límite del último término:

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_2(x)}{x^2} = 0$$

En consecuencia,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = -1/2$$

Ejemplo 10.2.4.2. ***Cálculo aproximado de integrales***

Supongamos que tienen que calcular el valor de

$$\int_0^{0.5} e^{-x^2}\,dx$$

La integral existe, porque se trata de una función continua en un intervalo cerrado. Pero, como comentamos antes, no podemos escribir una primitiva en forma cerrada. Hagamos un cálculo aproximado usando un polinomio de Taylor para el integrando.

Dado que $f(x) = e^{-x^2}$ es una función compuesta, es conveniente llamar $u = x^2$ y construir un polinomio de Taylor para $g(u) = e^{-u}$ centrado en $u_0 = 0$. Intentemos con el polinomio de grado 2: calculamos

$$\begin{aligned} g'(u) &= -e^{-u} \\ g''(u) &= e^{-u} \\ g^{(3)}(u) &= -e^{-u} \end{aligned}$$

con lo cual el polinomio resulta

$$P_2(u) = 1 - u + \frac{1}{2}u^2$$

y el resto se expresa mediante

$$R_2(u) = -\frac{1}{3!}e^{-c}u^3$$

con c entre 0 y u. Escribiendo $e^{-u} = 1 - u + \frac{1}{2}u^2 + R_2(u)$ y reemplazando $u = x^2$ encontramos que

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + R_2(x^2)$$

con c entre 0 y x^2.

En la integral definida que estamos calculando intervienen valores de x entre 0 y 0.5, por lo que en el peor de los casos tendremos que considerar c entre 0 y $0.5^2 = 0.25$. Un análisis de crecimiento de la función e^{-c} en la expresión del resto indica que es decreciente en $[0, 0.25]$, por lo que su máximo se encuentra en $c = 0$ y vale 1 Luego, podemos asegurar que

$$|R_2(x^2)| \leq \frac{1}{3!}x^6$$

Volviendo a la integral, tenemos que

$$\int_0^{0.5} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{0.5} \left(1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4\right)\,dx + \int_0^{0.5} R_2(x^2)\,dx$$

Si ignoramos la contribución del resto, estamos cometiendo un error

$$\int_0^{0.5} |R_2(x^2)|\,dx \leq \int_0^{0.5} \frac{1}{3!}x^6\,dx = \left[\frac{1}{3!}\frac{1}{7}x^7\right]_0^{0.5} = 0.00018\cdots$$

Entonces, la integral aproximada es

$$\int_0^{0.5} e^{-x^2}\,dx \approx \int_0^{0.5} \left(1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4\right)\,dx = 0.461458$$

con un error no mayor que 0.00018.

Pueden comparar este resultado con el valor que les da GeoGebra para la función erf(x) que presentamos en la sección 9.2.3.

Actividades

ACTIVIDAD 10.2.4.1. En esta actividad les proponemos algunos cálculos de límites similares al ejemplo 10.2.4.1:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sen} x}{x}$
- $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^{2/3}}$

ACTIVIDAD 10.2.4.2. En esta actividad les proponemos una integral similar al ejemplo 10.2.4.2:

- La integral $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \cos(x^2)\,dx$ no se puede resolver con la regla de Barrow, porque $\cos(x^2)$ no admite una primitiva conocida. Calculen aproximadamente su resultado usando un polinomio de Taylor.
- Asignen un margen de error al resultado obtenido.

Índice alfabético

área algebraica, 202
área geométrica, 203

análisis esquemático de gráficas, 165
antiderivada, 217
aproximación cuadrática, 286
aproximación lineal, 102, 285
aproximación polinómica, 289
asíntota horizontal, 149
asíntota oblicua, 163
asíntota vertical, 63

cantidades acumuladas, 196, 250
circunferencia trigonométrica, 47
cociente incremental, 90
codominio, 11
composición de funciones, 29
concavidad, 139
constante de integración, 216, 223
continuidad de la función inversa, 189
continuidad lateral, 81
coseno de una suma, 50
crecimiento en intervalos, 120, 124
crecimiento en un punto, 118
crecimiento exponencial, 269
criterio de la derivada segunda, 144
curvas integrales, 267

decaimiento exponencial, 269
derivada de la función inversa, 190
derivada en un punto, 93
derivada lateral, 94
derivada segunda, 140
derivadas superiores, 288
desplazamiento, 6, 34
diferencial, 102
dilatación, 7, 35
discontinuidad, 80
discontinuidad evitable, 83
discontinuidad finita, 82
discontinuidad infinita, 82
distancia, 7
dominio, 11
dominio de continuidad, 84
dominio de derivabilidad, 105

ecuación de la recta, 19
ecuación diferencial, 262
ecuación diferencial, separación de variables, 265
ecuación en dos incógnitas, 17
ecuación en una incógnita, 2
entorno, 10
extremos absolutos, 134
extremos locales, 130

fórmula de Lagrange, 295
fracciones simples, 240
función, 11
función biyectiva, 16, 177
función continua, 66, 80
función cuadrática, 21, 36
función definida a trozos, 25
función derivada, 105
función error, 259
función exponencial de base b, 41
función exponencial natural, 37, 259
función impar, 33
función integral, 212, 257
función inversa, 16, 171, 178
función inyectiva, 16, 175
función lineal, 18
función logaritmo de base b, 42
función logaritmo natural, 39, 257
función par, 32
función primitiva, 216
función primitiva, propiedades, 226
función raíz cuadrada, 23
función recíproca, 22
función suryectiva, 16, 175
funciones hiperbólicas, 51
funciones hiperbólicas inversas, 186
funciones trigonométricas, 46
funciones trigonométricas inversas, 182

gráfica, 13

igualdad de funciones, 15
imagen, 13
inecuaciones, 4
infinitésimos, 70
infinitésimos, orden de, 73
integración por partes, 234
integración por sustitución, 229
integral de Riemann, 199, 205

integral definida, 199
integral definida de funciones continuas, 204
integral definida, propiedades, 205
integral impropia, 271
integral impropia, convergencia, 276
integral impropia, criterios de convergencia, 279
integral indefinida, 218
integrales que no se pueden resolver, 249
intervalos, 4

límite en el infinito, 147
límite finito, definiciones, 59
límite lateral, 59
límite, noción de, 54
límites indeterminados, 72, 156
límites indeterminados especiales, 77
límites indeterminados especiales, 158, 162
límites infinitos, 61
límites oscilantes, 63
límites, reglas, 67, 153
longitud de una curva, 252

máximo local, 129, 131
máximos absolutos, 134
mínimo local, 129, 131
mínimos absolutos, 134

números reales, 1
notación de Leibnitz, 103, 140, 288
notación de Leibnitz, 93

optimización, 136
orden de magnitud, 161

pendiente de la recta, 20
pendiente en un punto, 92
polinomio de Taylor, 290
punto crítico de crecimiento, 130
punto de inflexión, 143
puntos críticos de concavidad, 143

radianes, 44
recta normal, 98
recta secante, 96
recta tangente, 97
reflexión, 7, 31
regla de asignación, 12
regla de Barrow, 219, 232, 238
regla de de compresión, 76
regla de la cadena, 113
reglas de derivación, 110
relación entre derivabilidad y continuidad, 99
relación pitagórica, 49
resto de una aproximación polinómica, 294

seno de una suma, 50
superficie encerrada entre dos curvas, 250
sustituciones trigonométricas, 246

tabla de derivadas, 107, 192
tabla de primitivas, 224
Teorema de Bolzano, 85
Teorema de Rolle, 122
Teorema del Valor Extremo, 136
Teorema del Valor Intermedio, 85
Teorema del Valor Medio, 123
Teorema del Valor Medio para Integrales, 210
Teorema Fundamental del Cálculo, 213
trabajo mecánico, forma integral, 254
trigonometría, 44

uso de unidades, 52

valor absoluto, 8, 26
valor medio de una función, 209
volumen de un sólido de revolución, 253

Bibliografía

[1] Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (2006). *Cálculo con geometría analítica - Volumen 1.* México: McGraw-Hill.
[2] Leithold, L. (1988). *El cálculo.* Cambridge, México: HARLA.
[3] Stewart, J. (2006). *Cálculo de una variable: Conceptos y contextos*. México: Cengage Learning.
[4] Thomas, G. (2006). *Cálculo infinitesimal y geometría analítica*. México: Pearson Educación.

Libros de Cátedra

Rossini, Gerardo Luis
Análisis Matemático para Ciencias Exactas y Naturales : funciones de una variable real / Gerardo Luis Rossini ; contribuciones de Ana E. Alonso. - 1a edición para el alumno. - La Plata : Universidad Nacional de La Plata ; La Plata : EDULP, 2018.
Libro digital, EPUB - (Libros de cátedra)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-34-1657-0

1. Análisis Matemático. 2. Educación Superior. I. Alonso, Ana E. , colab. II. Título.
CDD 515.0711

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata
47 N.º 380 / La Plata B1900AJP / Buenos Aires, Argentina
+54 221 427 3992 / 427 4898
edulp.editorial@gmail.com
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2018
ISBN 978-950-34-1657-0

e
exactas

Editorial
de la Universidad
de La Plata

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA